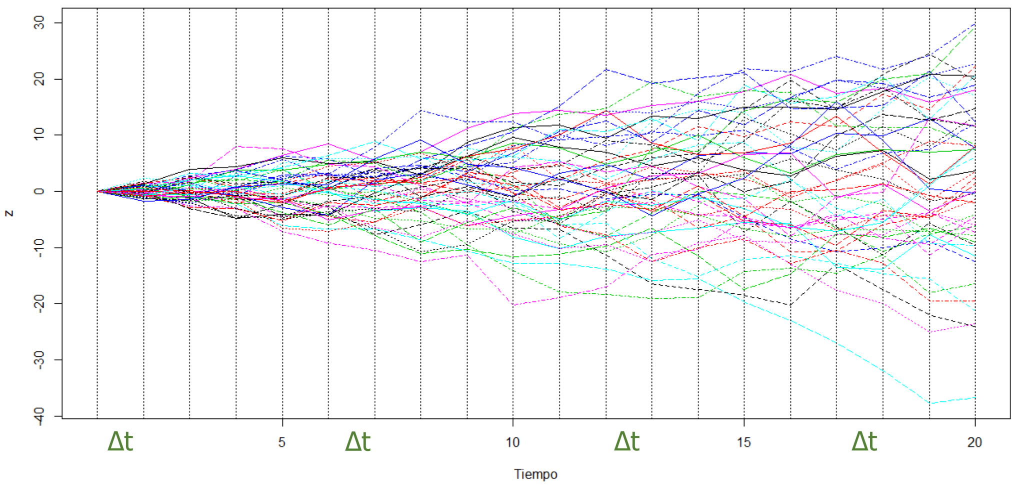
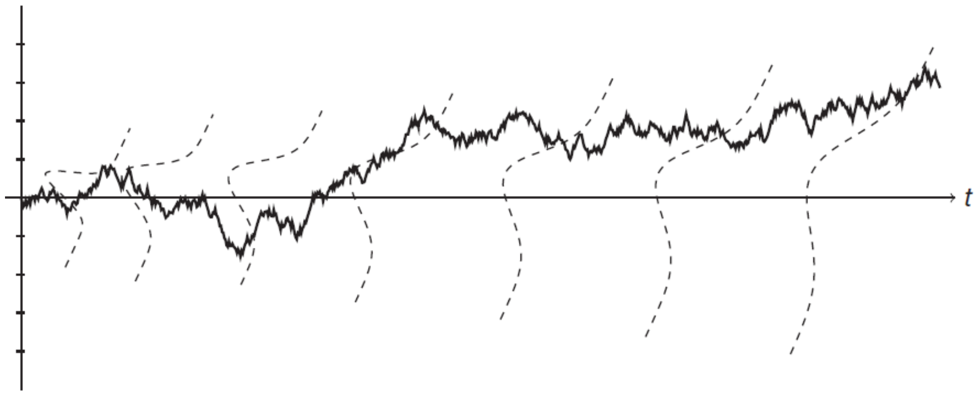
Movimiento Browniano Geométrico

Profesor: Miguel Jiménez

Proceso de Wiener

La variable z sigue un proceso de Wiener





Propiedades:

1. Proceso de Markov.

2. Incrementos independientes:

- Los Δz son independientes.

3. Los Δz en cada Δt tienen distribución normal.

- Varianza aumenta linealmente con Δt

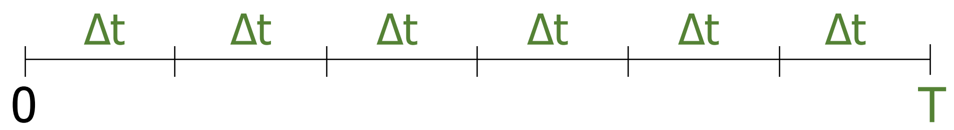
$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

$\varepsilon \sim N(0,1)$

- Los ε_t no están autocorrelacionados.

- No estacionario, la varianza tenderá a infinito.

Proceso de Wiener



Hay n intervalos de tiempo, Δt.

$$n = \frac{T}{\Delta t}$$

Variación: z(s + T) – z(s) = $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$

Como ε ~N(0,1), entonces: z(s + T) – z(s)~N(0,T)

Varianza = T = nΔt

- Varianza aumenta linealmente con Δt

Si $\Delta t \rightarrow 0$, el incremento en el proceso de Wiener, dz, es continuo y es igual a:

$$dz = \epsilon_t \sqrt{dt}$$

Proceso de Wiener generalizado

Movimiento Browniano con tendencia o *drift*:

$$dx = adt + bdz$$

a y b son constantes.

ε~N(0,1)

Drift a: Tasa de tendencia esperada de dx.

bdz: Ruido. La variabilidad es b veces un proceso de Wiener.

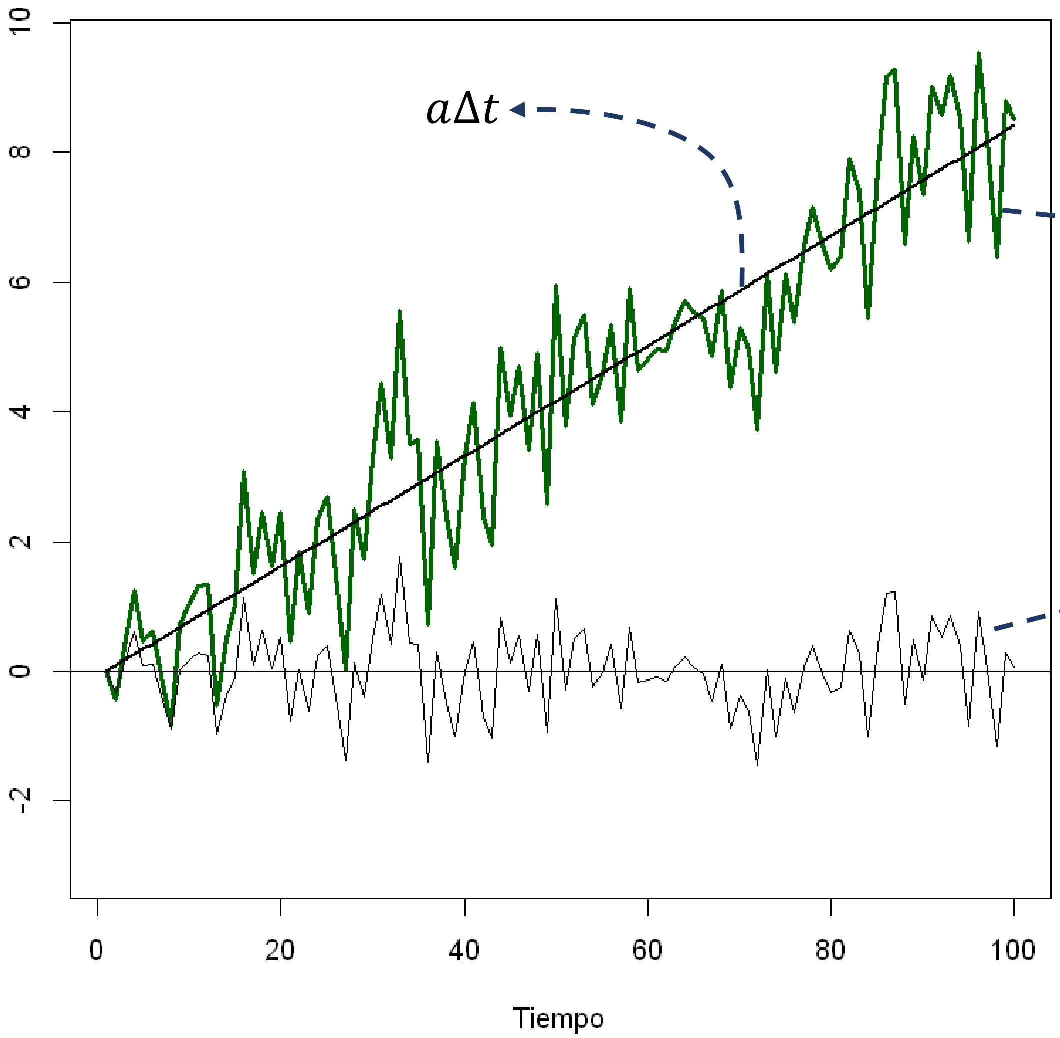
Para un intervalo pequeño de tiempo, Δt, la variación de x, Δx, es:

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta x \sim N(a\Delta t, b^2\Delta t)$$

Proceso de Wiener generalizado

Movimiento Browniano con tendencia o *drift*:



$$\Delta x = \underbrace{a\Delta t}_{\text{Componente determinística}} + \underbrace{b\varepsilon\sqrt{\Delta t}}_{\text{Componente estocástica}}$$

Proceso de Wiener, dz

$\varepsilon\sqrt{\Delta t}$

Proceso de Wiener generalizado

Movimiento Browniano con tendencia o *drift*:

Precios de las acciones:

Los precios de las acciones no siguen una distribución Normal, porque el precio nunca podrá ser inferior a cero.

$\Downarrow$

Supuesto: Los cambios logarítmicos de los precios de las acciones siguen una distribución Normal.

$\Downarrow$

Implica modelar el logaritmo del precio como un proceso de Wiener.

$\ln(S)$

Para un intervalo de tiempo, Δt y acción que no paga dividendos:

$$\frac{\Delta \boldsymbol{S}}{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{\mu} \Delta \boldsymbol{t} + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon} \sqrt{\Delta \boldsymbol{t}}$$

$$\Delta \boldsymbol{S} = \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{S} \Delta \boldsymbol{t} + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{S} \boldsymbol{\varepsilon} \sqrt{\Delta \boldsymbol{t}}$$

$\boldsymbol{S}$: Precio de la acción.

$\Delta \boldsymbol{S}$: Cambio en el precio de la acción.

$\boldsymbol{\mu}$: Rendimiento esperado de la acción o *drift*.

$\boldsymbol{\sigma}$: Volatilidad de la acción.

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\boldsymbol{\mu} \Delta \boldsymbol{t}, \boldsymbol{\sigma}^2 \Delta \boldsymbol{t})$$

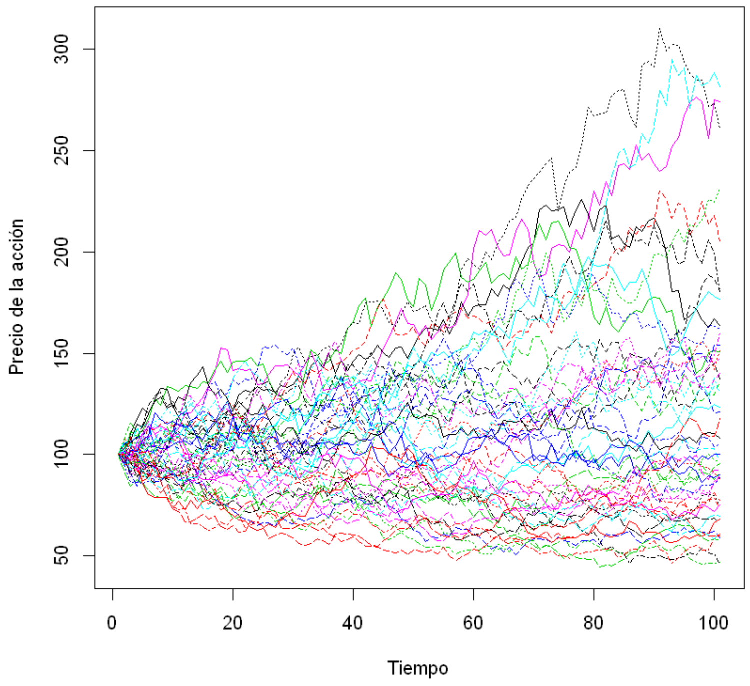
Proceso de Wiener generalizado

Movimiento Browniano con tendencia o *drift*:

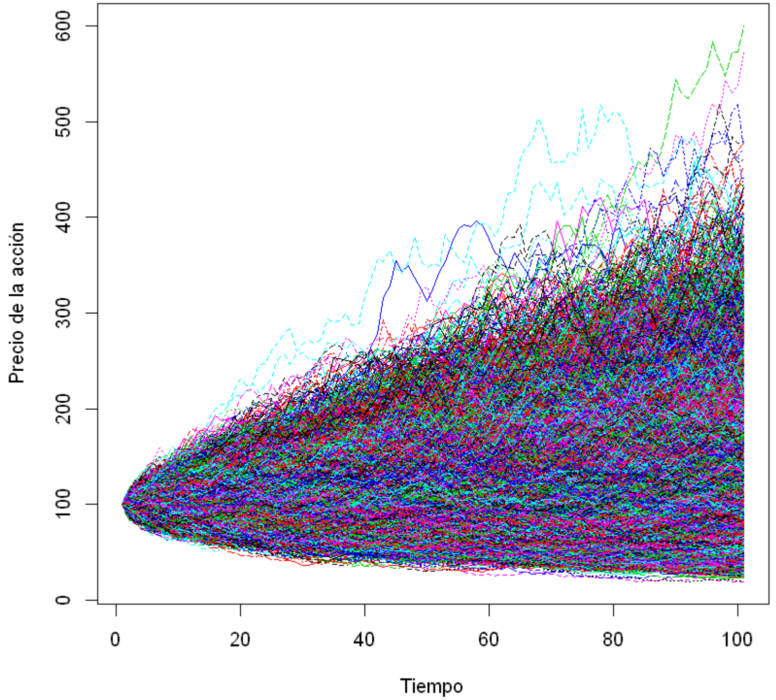
$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \qquad S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

$\boldsymbol{S}$: \$100, $\boldsymbol{\mu}$: 0,2% continua diario, $\boldsymbol{\sigma}$: 4% diario.

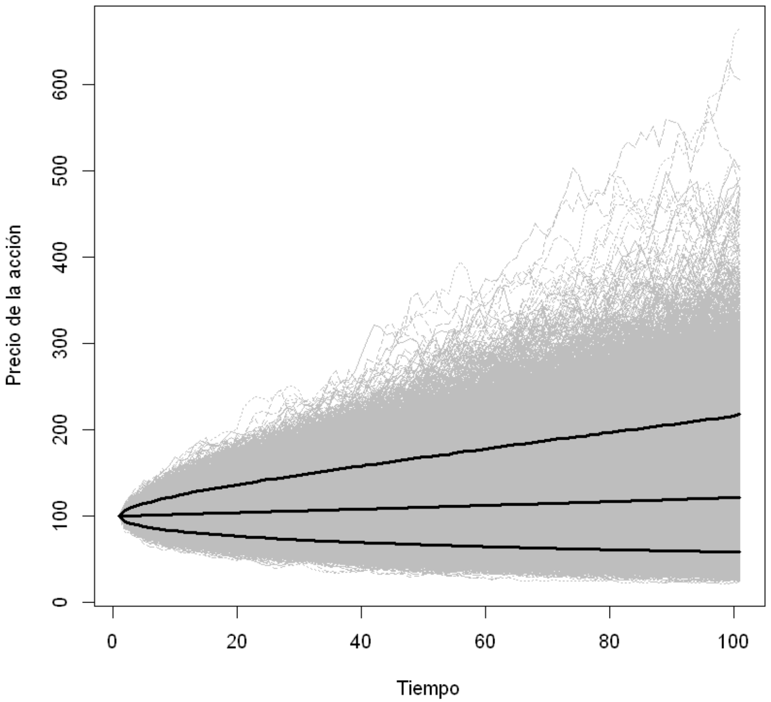
50 trazas o *paths*



50.000 trazas o *paths*



50.000 trazas o *paths*



Proceso de Wiener generalizado

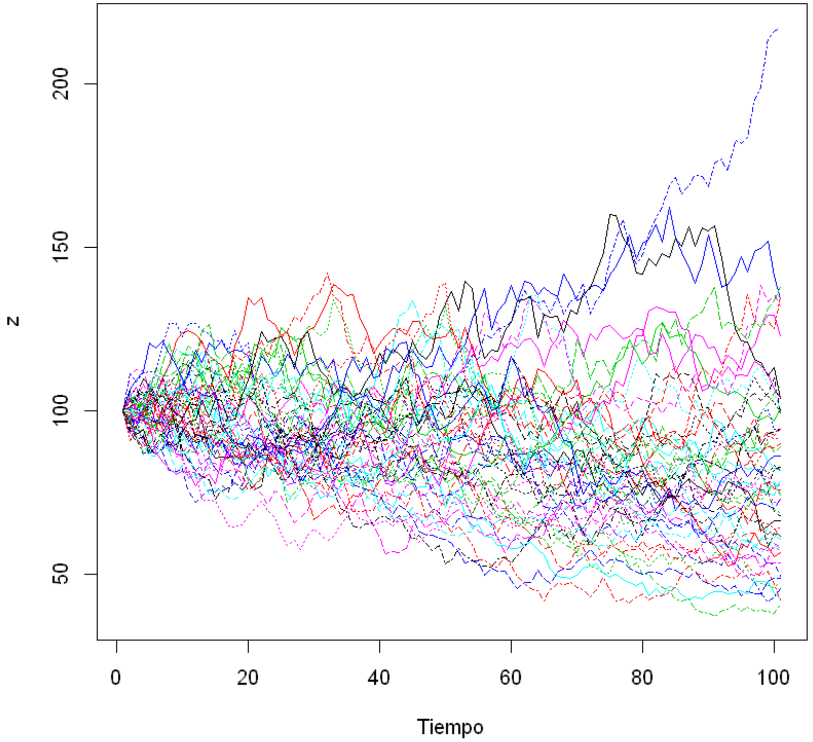
Movimiento Browniano con tendencia o *drift*:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

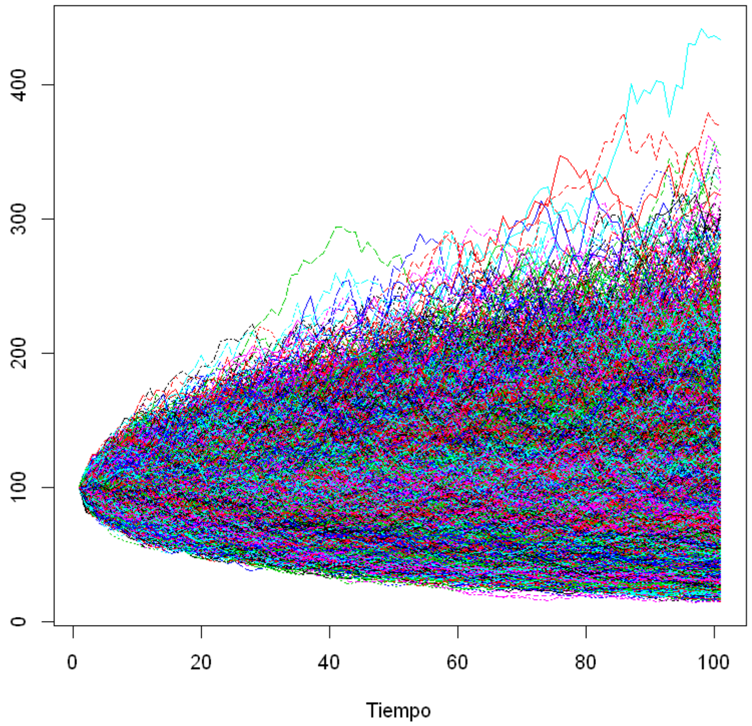
$$S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

S: \$100, $\boldsymbol{\mu}$: - 0,2% continua diario, $\boldsymbol{\sigma}$: 4% diario.

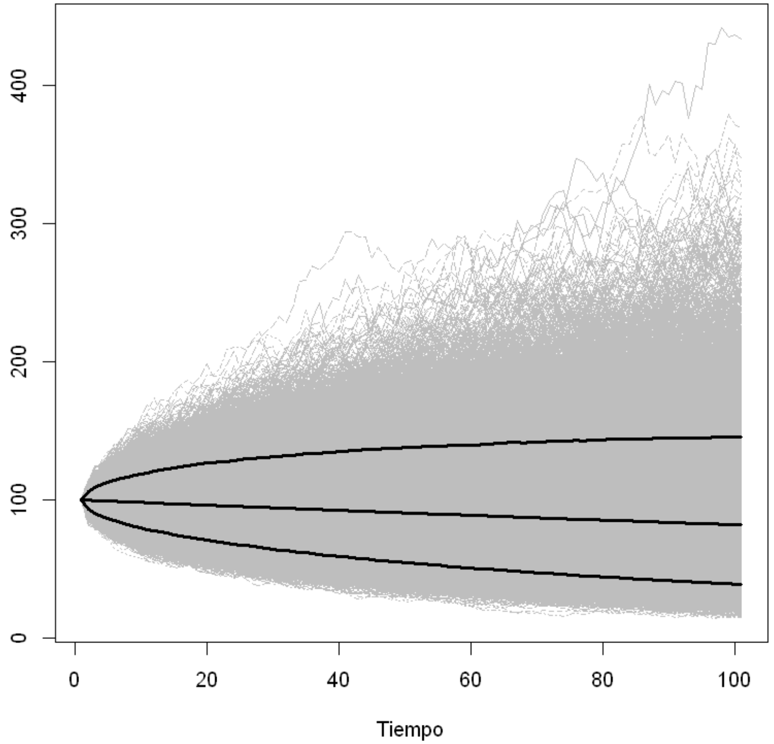
50 trazas o *paths*



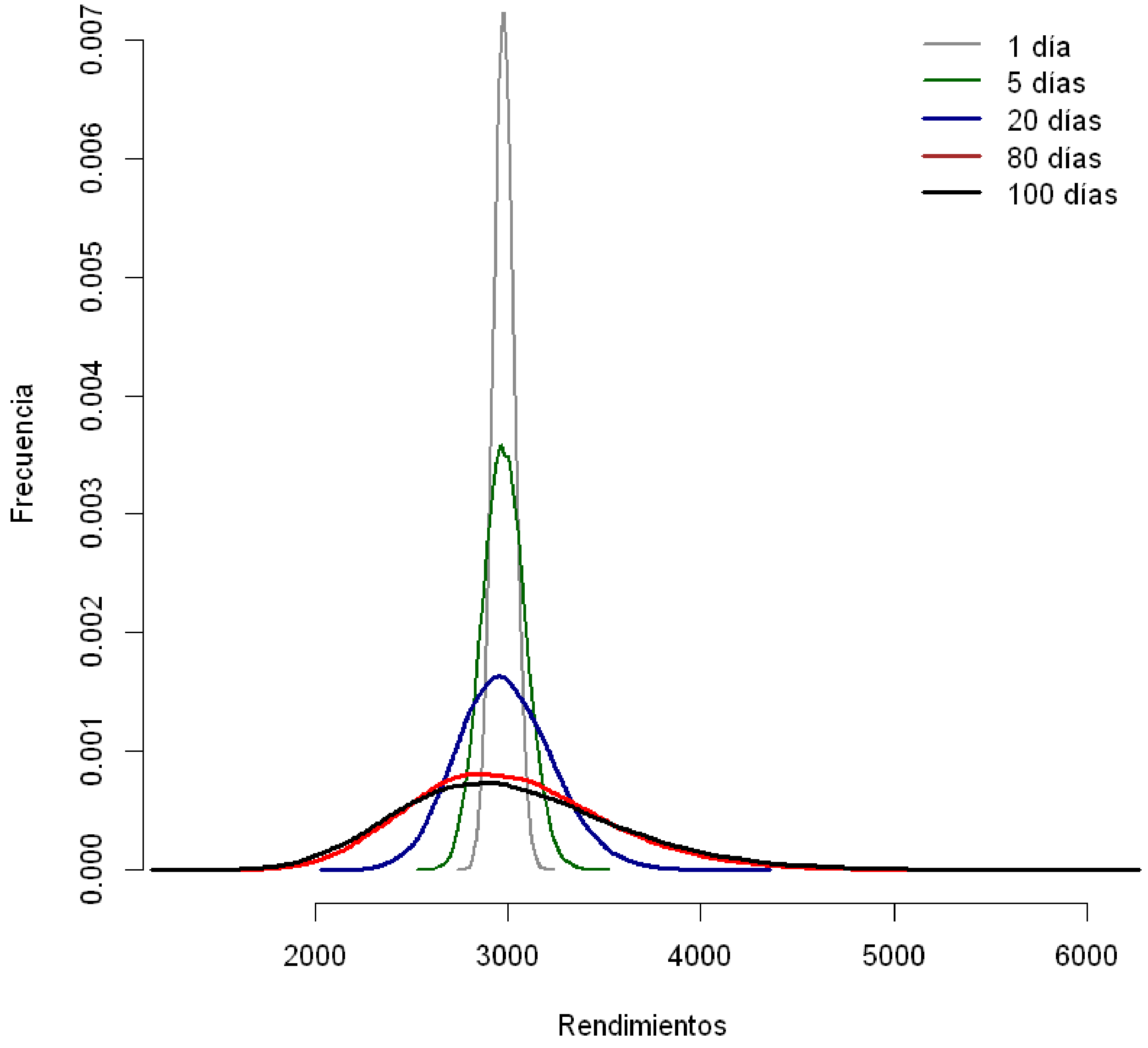
50.000 trazas o *paths*



50.000 trazas o *paths*



Proceso de Wiener generalizado



Lema de Itô

No se puede derivar una ecuación estocástica de tiempo continuo que depende de una o dos variables (como la del Movimiento Browniano) utilizando la regla de la cadena, porque en cualquier punto de la función a derivar el comportamiento puede ser creciente o decreciente.

Se debe utilizar otro método: El lema de Itô, que es la versión estocástica de la regla de la cadena.

Si una variable x sigue un proceso de Wiener, $dx = adt + bdz$, y G es una función de x y t, entonces:

$$dG = \underbrace{\left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)}_{\textit{Drift}} dt + \underbrace{\frac{\partial G}{\partial x}}_{} bdz$$

Varianza: $\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b^2$

La función G es continua y diferenciable en cualquiera de sus puntos.

Lema de Itô

$$dx = adt + bdz$$

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz$$

Para modelar el comportamiento de una acción que no paga dividendos: $ds = \mu sdt + \sigma sdt$

$$a = \mu s$$

$$b = \sigma s$$

Sustituyendo:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial s}\mu s + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}\sigma^2 s^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial s}\sigma sdz$$

Lema de Itô

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial s}\mu s + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}\sigma^2 s^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial s}\sigma s dz$$

Si $G = \ln[s(t)]$

Derivando parcialmente a G con respecto a s, t y s^2, tendremos:

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \frac{1}{s}; \quad \frac{\partial G}{dt} = 0; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} = -\frac{1}{s^2}$$

$$dG = \left(\frac{1}{s}\mu s + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s^2}\right)\sigma^2 s^2\right)dt + \frac{1}{s}\sigma s dz$$

$$dG = \underbrace{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}_{\textit{Drift}} dt + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Volatilidad}}}{\sigma} dz$$

Lema de Itô

Como $G = \ln[s(t)]$

$$d\ln[s(t)] = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz$$

$$\int_{t=0}^{T} d\ln[s(t)] = \int_{t=0}^{T} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \int_{t=0}^{T} \sigma dz$$

$$ln[s(T)] - ln[s(0)] = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \ \sigma dz$$

$$ln\left[\frac{s(T)}{s(0)}\right] = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \ \sigma dz$$

$$s(T) = s(0) e^{\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \ \sigma dz\right]}$$

Movimiento Browniano Geométrico

$$s(T) = s(0)e^{\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma dz\right]}$$

Para un intervalo de tiempo pequeño, Δt:

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \Delta z\right]}$$

Como $\Delta \mathrm{z} = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ porque es un proceso de Wiener, entonces:

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}\right]}$$

La fórmula también es conocida como Movimiento Browniano Geométrico (MBG).

Con este modelo el precio nunca será negativo.

Movimiento Browniano Geométrico

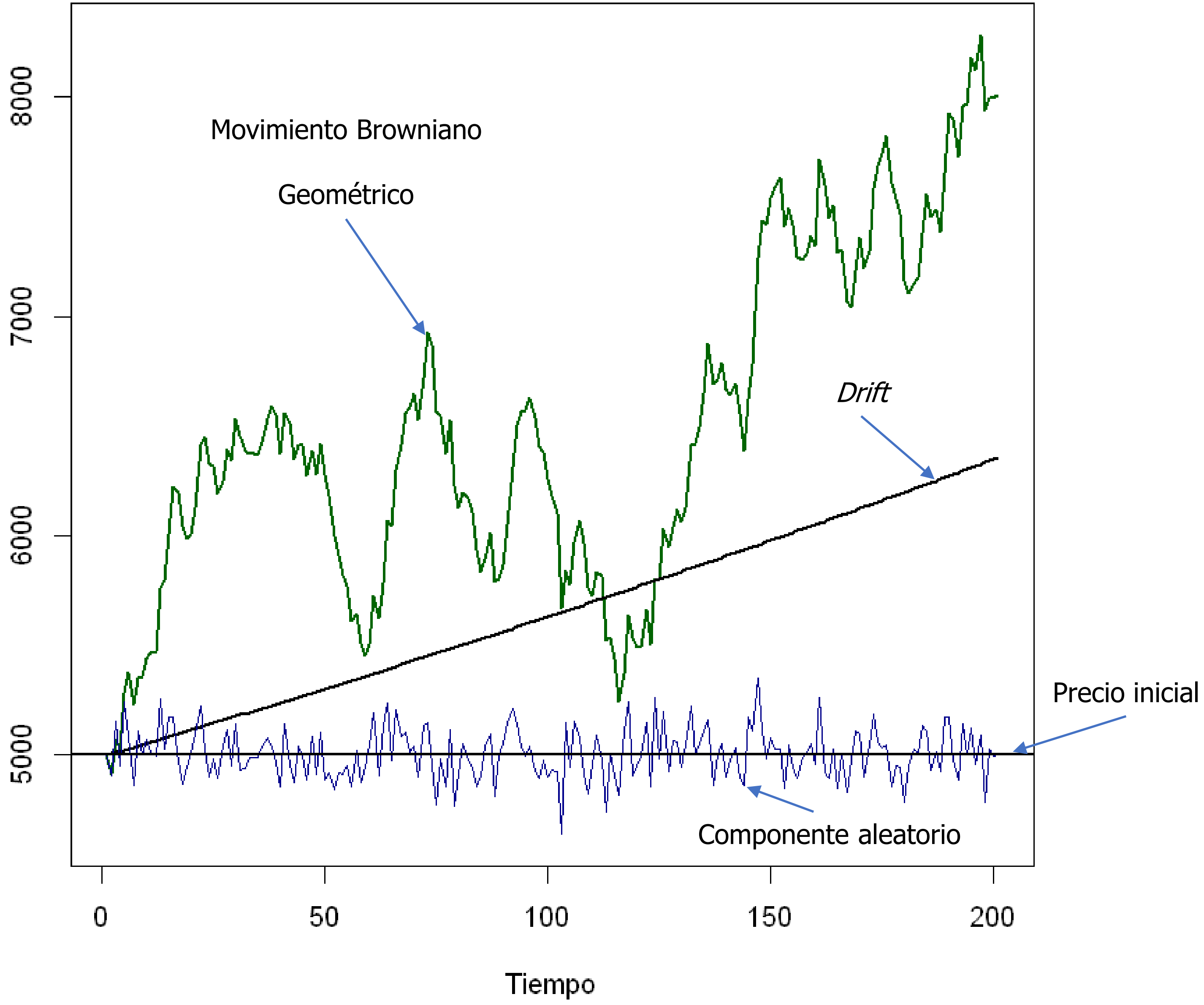
$\boldsymbol{S}$: $\$5000$

$\boldsymbol{\mu}$: 0,14% continua diario

$\boldsymbol{\sigma}$: 1,8% diario.

$\Delta t = 1$

n = 200

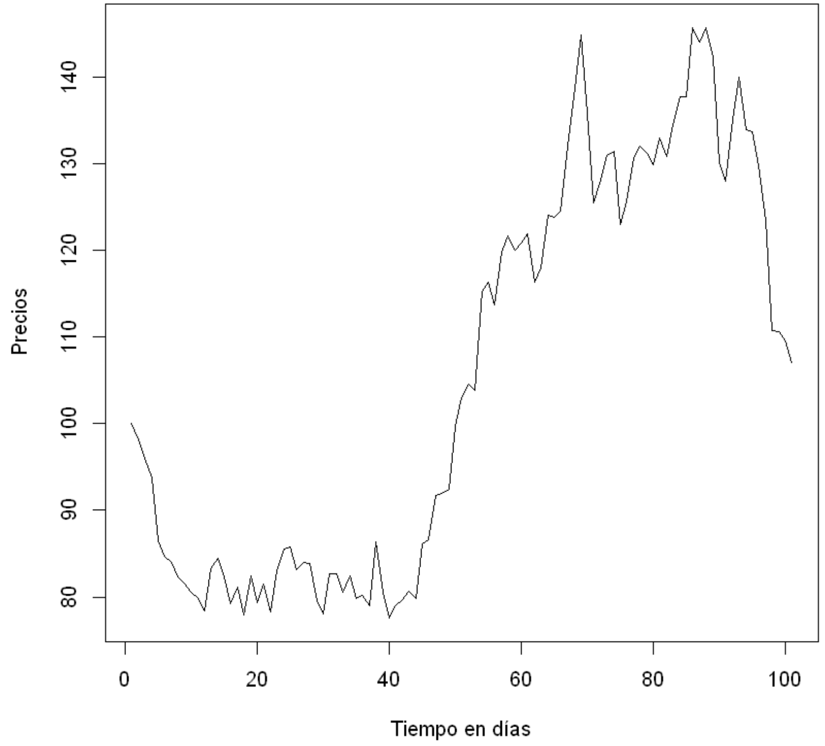


Movimiento Browniano Geométrico

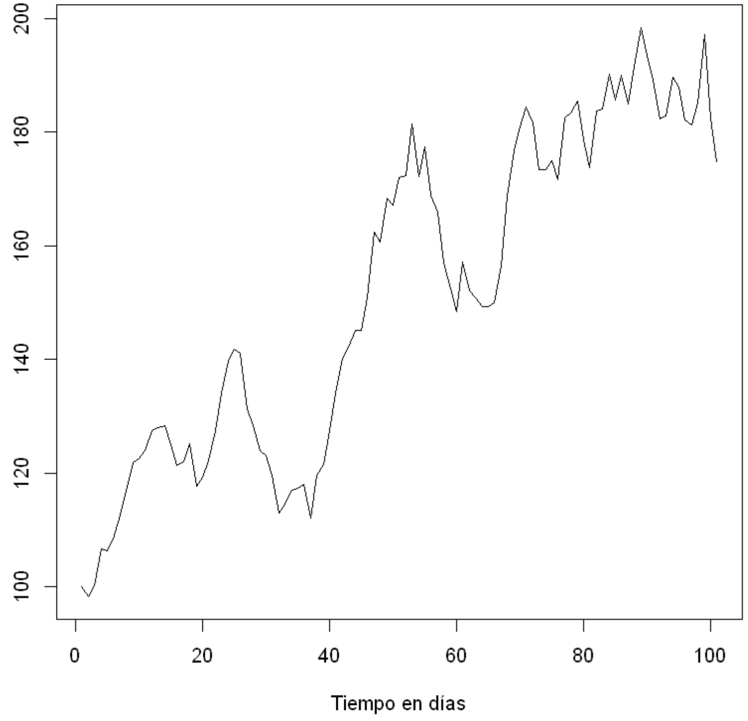
$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}\right]}$$

$\boldsymbol{S}$: \$100, $\boldsymbol{\mu}$: 0,2% continua diario, $\boldsymbol{\sigma}$: 4% diario, $\Delta t = 1$

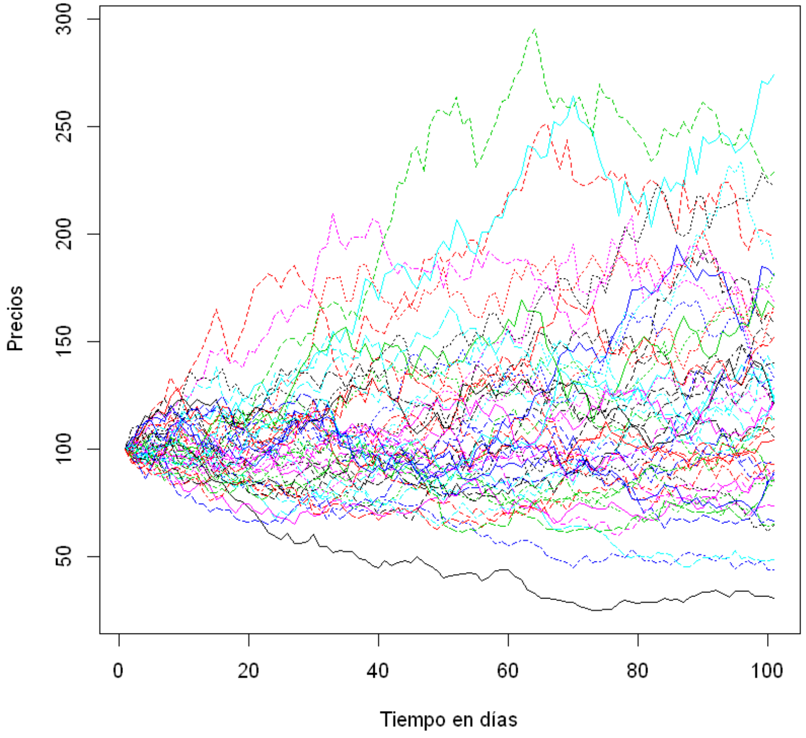
1 traza o 1 *path*



1 traza o 1 *path*

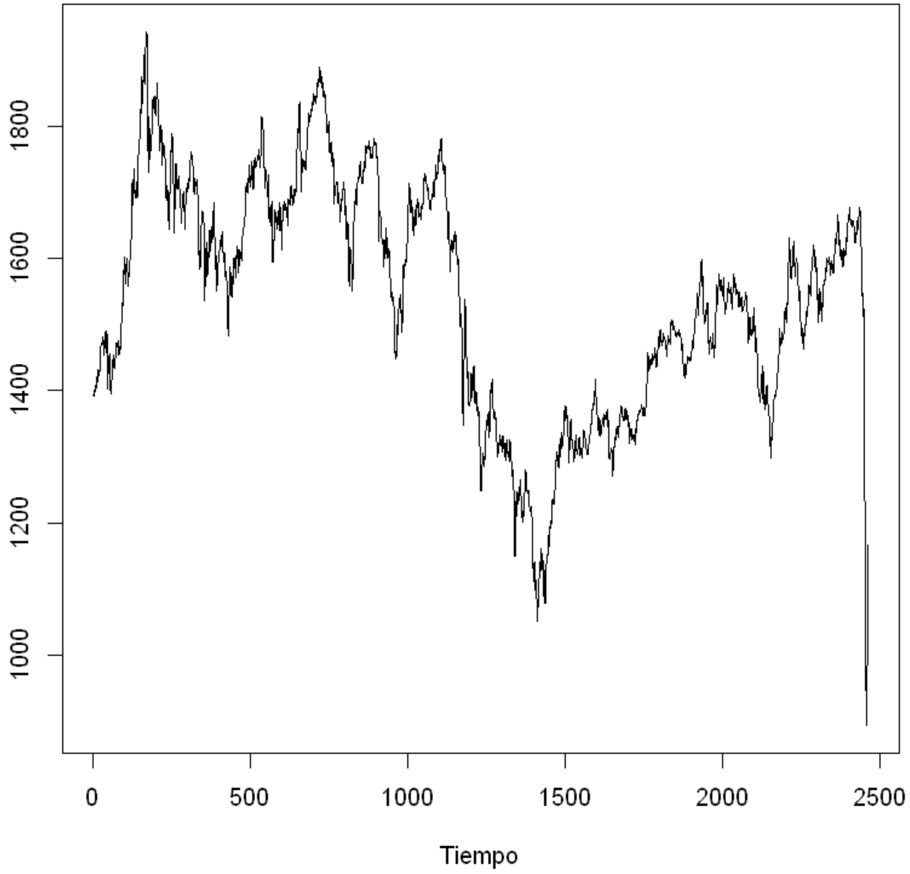


50 trazas o *paths*

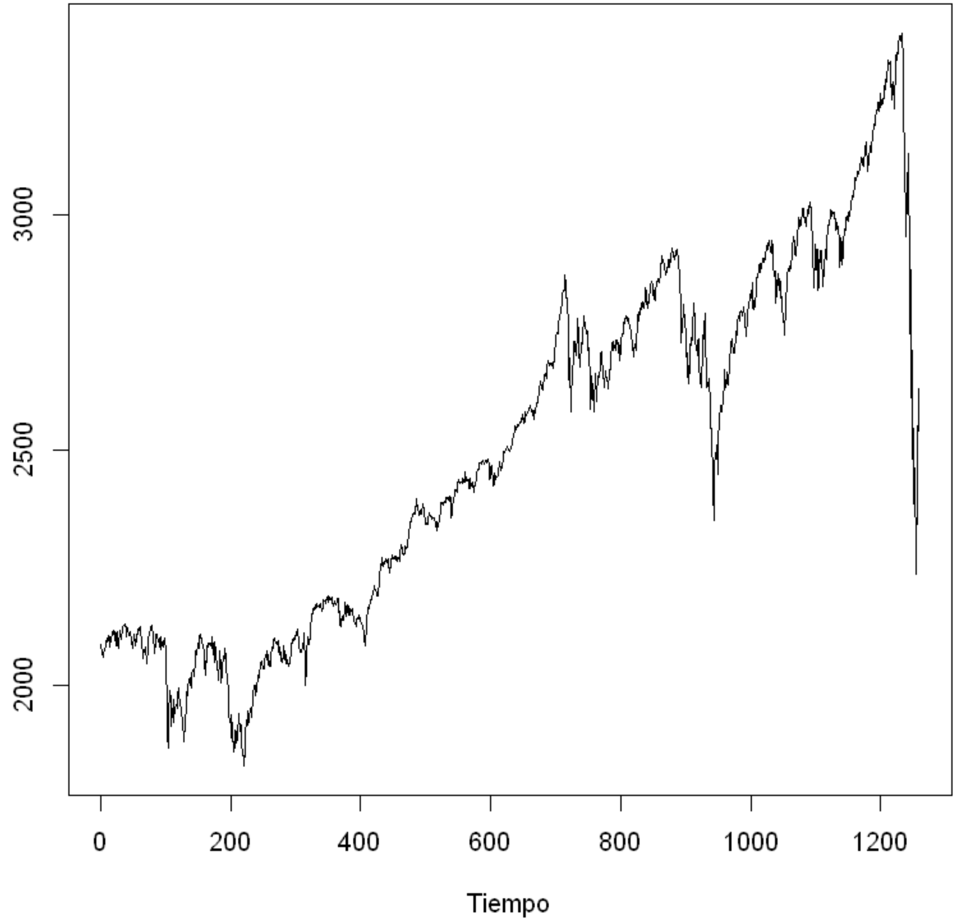


Comportamiento de los precios reales

Índice COLCAP



Índice S&P 500



Referencias

Dobrow, R. P. (2016). *Introduction to stochastic processes with R* (1th ed.). Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

Hull, J. (2012). *Options, futures, and other derivatives* (8th ed.). Boston: Pearson Education.

Mascareñas, J. (2018). Procesos Estocásticos: Introducción. Disponible en: SSRN: https://ssrn.com/abstract=2316024 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2316024

Movimiento Browniano Geométrico

Gracias

Profesor: Miguel Jiménez