Método Black-Scholes

Profesor: Miguel Jiménez

Método Black-Scholes

- Fischer Black & Myron Scholes, 1973. The Princing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy, 81. pp. 637 - 59.

- Robert Merton, 1973. Theory of Rational Option Princing. Bell Journal of Economics and Management Science, pp. 141 - 83.

Modelo de valuación de opciones sobre acciones

Método Black-Scholes

- Acciones que no pagan dividendos.
- La rentabilidad sobra la acción en un corto período de tiempo se distribuye normal.
- Las rentabilidades de dos períodos diferentes son independientes.

$\mu\Delta t$: Media rentabilidad en el tiempo Δt.

μ: Rentabilidad esperada de la acción.

σ: Volatilidad del precio de la acción.

$\sigma\sqrt{\Delta t}$: Desviación estándar de la rentabilidad.

Método Black-Scholes

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \varphi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$$

ΔS: Cambio en el precio de la acción S en el tiempo Δt.

φ (m,v): Distribución normal con media μ y varianza σ^2.

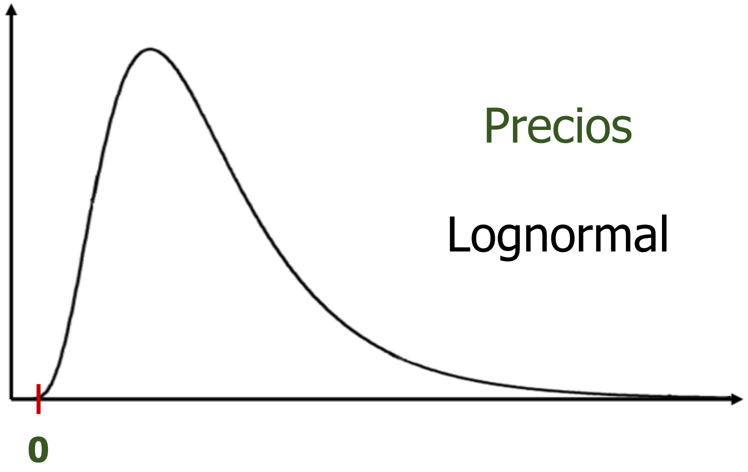
Desviación estándar = $\sqrt{\text{varianza}}$

Método Black-Scholes

Distribución logarítmica normal:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \varphi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$$

La ecuación implica que el precio de la acción en cualquier fecha futura tiene una distribución logarítmica normal.

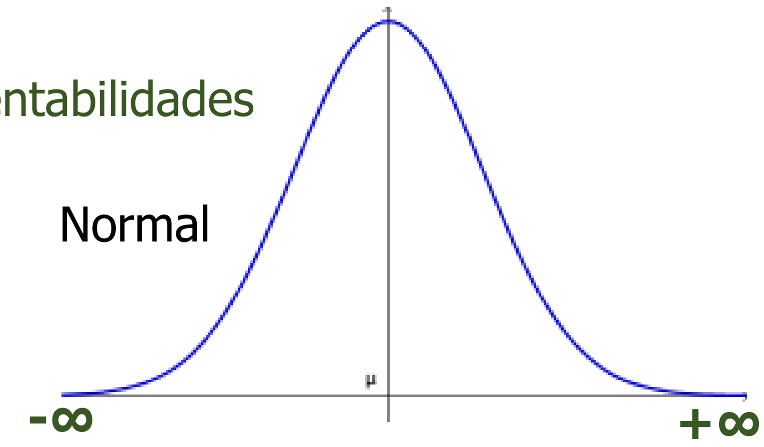


Precios

Lognormal

Rentabilidades

Normal



Método Black-Scholes

Supuestos:

1. Los precios de la acción se comporta de acuerdo al modelo logarítmico normal, con μ y σ constantes.
2. No hay costos de transacción ni impuestos.
3. No hay dividendos sobre la acción durante la vida de la opción.
4. No hay oportunidades de arbitraje libres de riesgo.
5. La negociación de los valores es continua.
6. Los inversionistas pueden adquirir u otorgar préstamos a la misma tasa de interés libre de riesgo.
7. La tasa de interés libre de riesgo a corto plazo, r, es constante.

Método Black-Scholes

Opción de compra europea: $c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$

Opción de venta europea: $p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

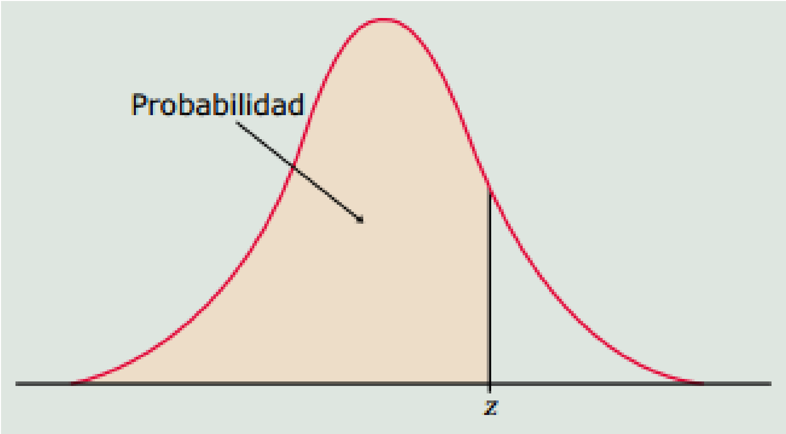
T: Tiempo hasta el vencimiento de la opción.

Método Black-Scholes

$N(d_1)$ y **$N(d_2)$** son valores acumulados normales de la probabilidad de d_1 y d_2 respectivamente.

Función de probabilidad normal acumulada.

d_1 y **d_2** son valores de z de la función de la probabilidad normal.



Excel:

=DISTR.NORM.ESTAND(z)

Método Black-Scholes

TABLA A: Probabilidades de la normal estándar (cont.)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Método Black-Scholes

TABLA A: Probabilidades de la normal estándar

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

Método Black-Scholes

Ejemplo

S_0 = \$100

K = \$105

T = 1 año

r = 12% c. anual

σ = 10% c. anual

Valore la opción de compra y de venta por el modelo de Black - Scholes

Método Black-Scholes

Ejemplo

S_0 = \$100

K = \$105

T = 1 año

r = 12% c. anual

σ = 10% c. anual

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{100}{105}\right) + \left(0{,}12 + \frac{0{,}10^2}{2}\right)1}{0{,}10\sqrt{1}} = 0{,}76$$

$$d_2 = 0{,}76 - 0{,}10\sqrt{1} = 0{,}66$$

Método Black-Scholes

Ejemplo

S_0 = \$100

K = \$105

T = 1 año

r = 12% c. anual

σ = 10% c. anual

$d_1 = 0,76$

$d_2 = 0,66$

Resultado de las tablas:

$N(d_1) = 0,7764$

$N(d_2) = 0,7454$

Método Black-Scholes

Ejemplo

S_0 = \$100

K = \$105

T = 1 año

r = 12% c. anual

σ = 10% c. anual

$N(d_1) = 0{,}7764$

$N(d_2) = 0{,}7454$

Opción de compra:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$c = 100 \times 0{,}7764 - 105 \times e^{-0{,}12 \times 1} \times 0{,}7454$$

$$\boldsymbol{c = \$8{,}22}$$

Método Black-Scholes

Ejemplo

S_0 = \$100

K = \$105

T = 1 año

r = 12% c. anual

σ = 10% c. anual

$N(d_1) = 0{,}7764$

$N(d_2) = 0{,}7454$

$N(-d_1) = 1 - 0{,}7764 = 0{,}2236$

$N(-d_2) = 1 - 0{,}7454 = 0{,}2546$

Opción de venta:

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1)$$

$$p = 105e^{-0{,}12\times 1} \times 0{,}2546 - 100 \times 0{,}2236$$

$$\boldsymbol{p = \$1,35}$$

Método Black-Scholes

S_0 = \$100

K = \$105

T = 1 año

r = 12% c. anual

σ = 10% c. anual

Solución en EXCEL

c	**\$8,2232**
p	**\$1,3498**

Método Black-Scholes

Cuando la acción entrega dividendos:

D: Valor presente de los dividendos.

Opción de compra europea: $c = (S_0 - D)N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$

Opción de venta europea: $p = Ke^{-rT}N(-d_2) - (S_0 - D)N(-d_1)$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0 - D}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad d_2 = \frac{ln\left(\frac{S_0 - D}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

T: Tiempo hasta el vencimiento de la opción.

Método Black-Scholes

$N(d_2)$: Probabilidad de que la opción de compra se ejerza.

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

Beneficio de una *call* al vencimiento:

$$S_0 e^{rT} N(d_1) - KN(d_2)$$

Valor presente del beneficio T = 0:

$$[S_0 e^{rT} N(d_1) - KN(d_2)]e^{-rT} = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

Método Black-Scholes

N(- d_2): Probabilidad de que la opción de venta se ejerza.

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1)$$

Beneficio de una *put* al vencimiento:

$$KN(-d_2) - S_0e^{rT}N(-d_1)$$

Valor presente del beneficio T = 0:

$$[KN(-d_2) - S_0e^{rT}N(-d_1)]e^{-rT} = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1)$$

Opciones europeas sobre divisas

Opción de compra europea: $$c = S_0 e^{-r_f T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

Opción de venta europea: $$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad d_2 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

T: Tiempo hasta el vencimiento de la opción. r_f: Tasa libre de riesgo en la moneda extranjera.

Opciones europeas sobre divisas

Ejemplo

S_0 = $5.200

K = $5.000

T = 18 meses

r = 2% c. mensual

r_f = 0,05% c. mensual

σ = 10% c. mensual

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{5200}{5000}\right) + \left(0{,}02 - 0{,}0005 + \frac{0{,}10^2}{2}\right)18}{0{,}10\sqrt{18}} = 1{,}1319$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$d_2 = 1{,}1319 - 0{,}10\sqrt{18} = 0{,}71$$

Opciones europeas sobre divisas

Ejemplo

S_0 = \$5.200

K = \$5.000

T = 18 meses

r = 2% c. mensual

r_f = 0,05% c. mensual

σ = 10% c. mensual

$d_1 = 1{,}13$

$d_2 = 0{,}71$

Resultado de las tablas:

$N(d_1) = 0{,}8708$

$N(d_2) = 0{,}7611$

Opciones europeas sobre divisas

Ejemplo

S_0 = \$5.200

K = \$5.000

T = 18 meses

r = 2% c. mensual

r_f = 0,05% c. mensual

σ = 10% c. mensual

$N(d_1)$ = 0,8708

$N(d_2)$ = 0,7611

Opción de compra:

$$c = S_0 e^{-r_f T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$c = 5200 \times e^{-0{,}0005 \times 18} \times 0{,}8708 - 5000 \times e^{-0{,}02 \times 18} \times 0{,}7611$$

$$\boldsymbol{c = \$1.832{,}58}$$

MS Excel

$\boldsymbol{c = \$1.836{,}84}$

Opciones europeas sobre divisas

Ejemplo

S_0 = \$5.200

K = \$5.000

T = 18 meses

r = 2% c. mensual

r_f = 0,05% c. mensual

σ = 10% c. mensual

$N(d_1) = 0{,}8708$

$N(-d_1) = 1 - 0{,}8708 = 0{,}1292$

$N(d_2) = 0{,}7611$

$N(-d_2) = 1 - 0{,}7611 = 0{,}2389$

Opción de venta:

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0e^{-r_fT}N(-d_1)$$

$$p = 5000e^{-0{,}02\times 18} \times 0{,}2389 - 5200 \times e^{-0{,}0005\times 18} \times 0{,}1292$$

$$\boldsymbol{p = \$170{,}81}$$

Método Black-Scholes

Gracias

Profesor: Miguel Jiménez