Distribuciones de probabilidad

Profesor: Miguel Jiménez

Material de los cursos:

https://migueljimenezg.github.io/cursos/

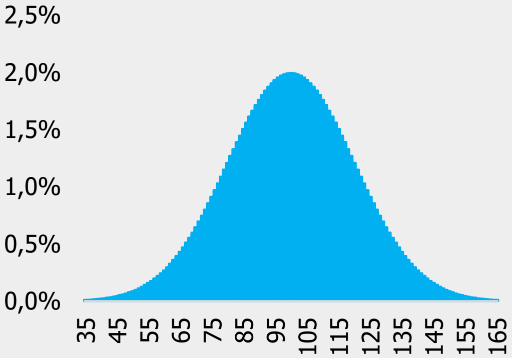
Variable aleatoria

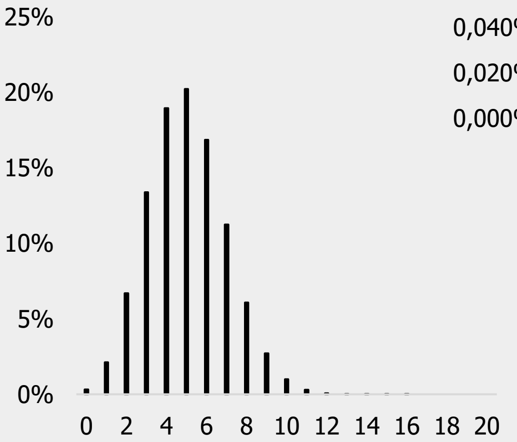
Una variable aleatoria asigna un valor a un resultado posible de un fenómeno.

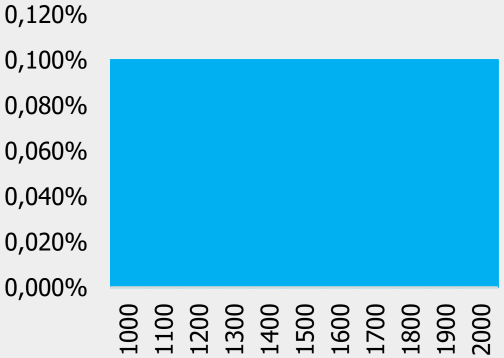
Cada uno de estos resultados tiene una probabilidad de ocurrencia.

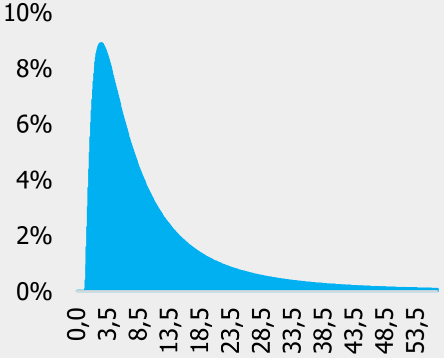
Cada variable aleatoria tiene una distribución de probabilidad.

La distribución de probabilidad muestra cada resultado con su probabilidad de ocurrencia.









(Machain, 2014)

Distribuciones de probabilidad

Las variables aleatorias se organizan en distribuciones de probabilidad.

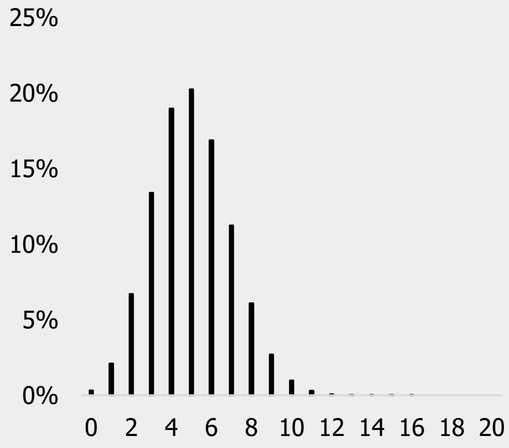
Existes unas distribuciones de probabilidad definidas y se dividen en distribuciones discretas y continuas.

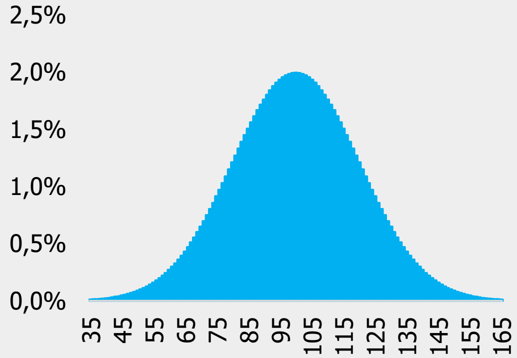
Distribuciones discretas:

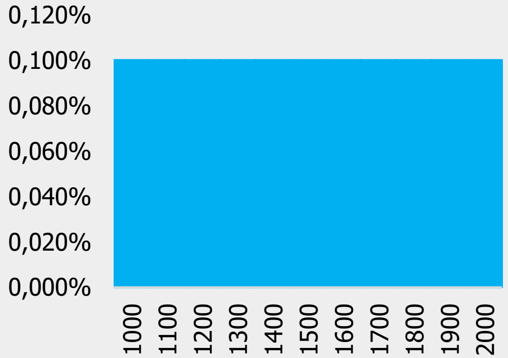
Tienen un número finito de posibles resultados.

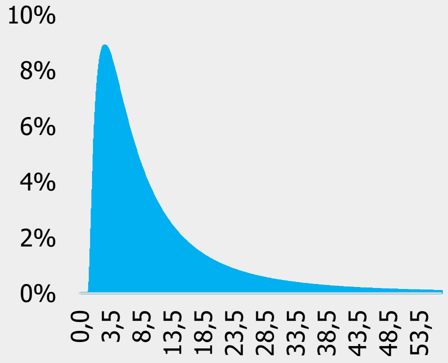
Distribuciones continuas:

Tienen un número infinito de posibles resultados. En las distribuciones de probabilidad no tienen espacios en la curva.









(Machain, 2014)

Distribuciones de probabilidad continua

Distribución Normal

Distribución Normal o de Gauss:

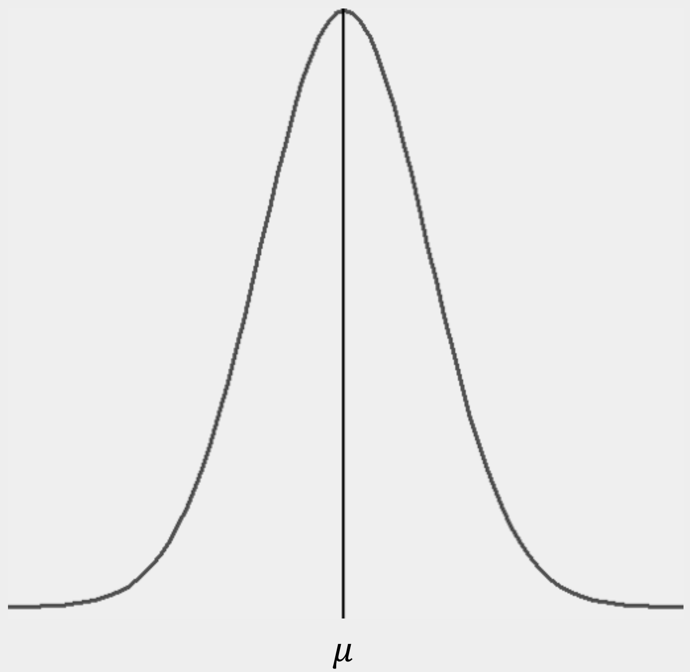
- Distribución continua.
- Simétrica: sesgo = 0.
- Mesocúrtica: curtosis = 3.

Parámetros:

- μ: media. Es el valor esperado (E[x]) de la variable..
- σ: desviación estándar. Volatilidad de la variable.

Curva simétrica en forma de campana que se centra en el valor esperado, μ, y tiene una dispersión que está determinada por la desviación estándar, σ.

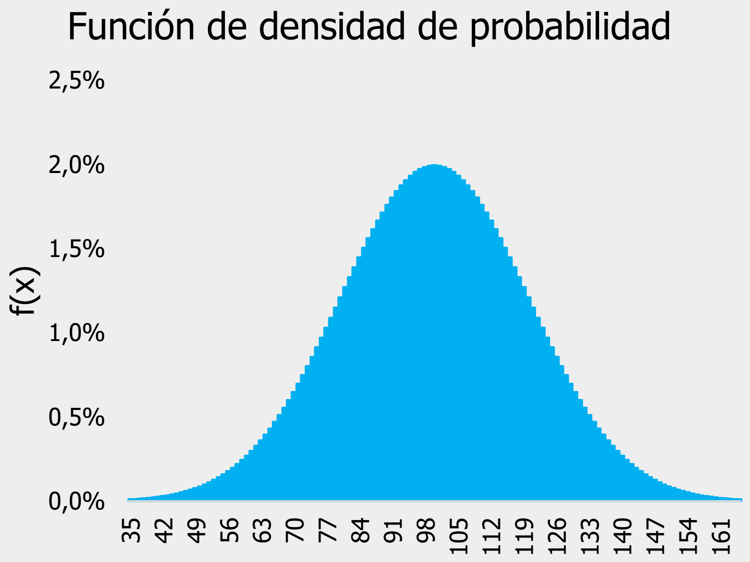
$x \sim N(\mu, \sigma^2)$



Media = Moda = Mediana

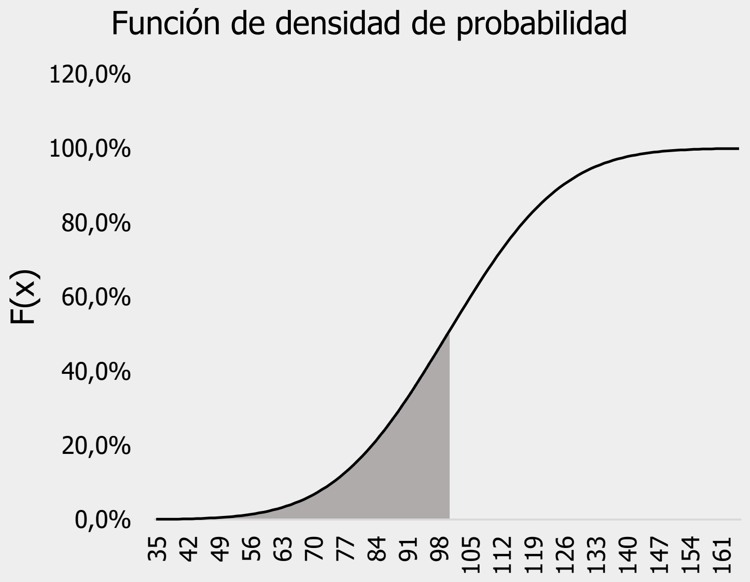
(Machain, 2014)

Distribución Normal



Función de densidad de probabilidad (Probability density function - PDF):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Función de distribución acumulada (Cumulative distribution function - CDF):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

(Machain, 2014)

Distribución Normal

Dado x:

$$P(x) = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

En Excel:

P(x) = DISTR.NORM(x; μ; σ; FALSO)

Dado x:

$$P(< x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

En Excel:

P(< x) = DISTR.NORM(x; μ; σ; VERDADERO)

Inversa de la Función de distribución acumulada:

$x = F^{-1}(x)$

Dado P(< x) o F(x):

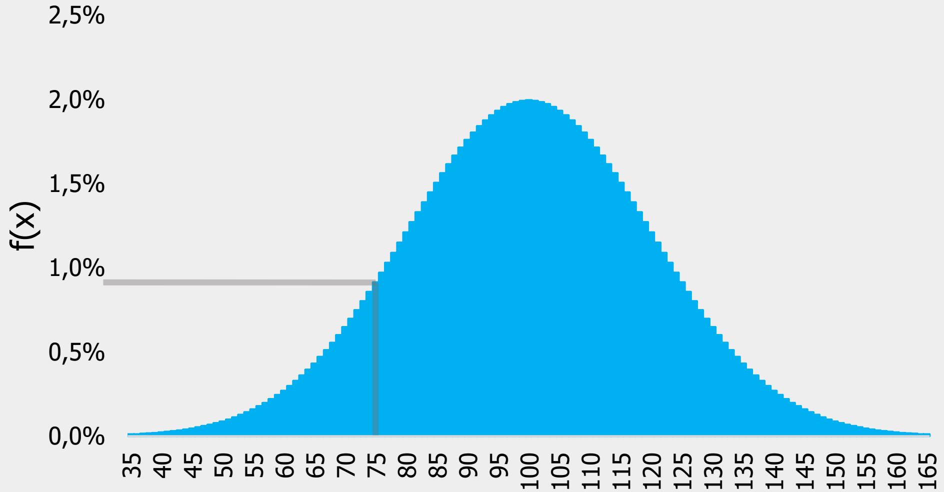
En Excel:

x = DISTR.NORM.INV(probabilidad; μ; σ)

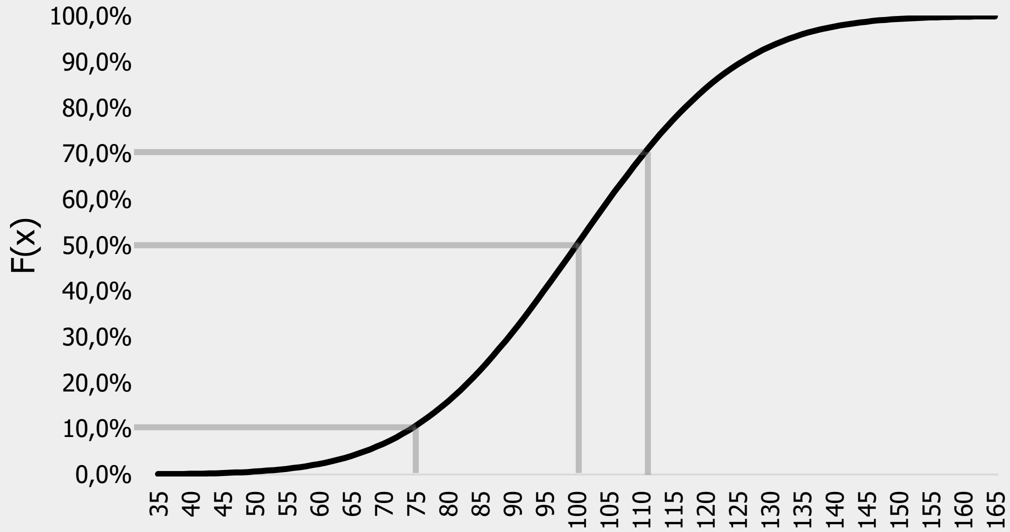
(Machain, 2014)

Distribución Normal

Función de densidad de probabilidad



Función de distribución acumulada



Media	μ	100
Desviación estándar	σ	20

$x \sim N(100, 20^2)$

Si x = 75

Función de densidad de probabilidad	f(x)	0,91%
Función de distribución acumulada	F(x)	10,56%

Si F(x) = 70% (probabilidad)

x = 110,5

Si F(x) = 50% (probabilidad)

x = 100

(Machain, 2014)

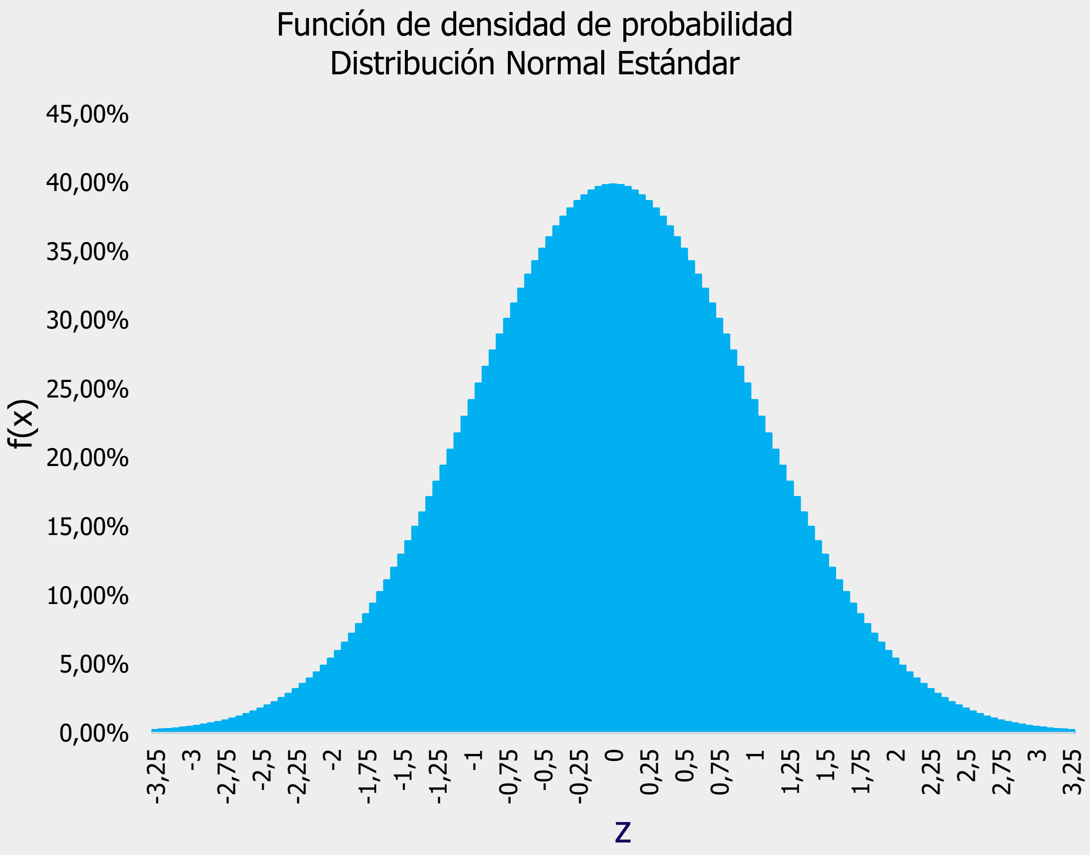
Distribución Normal Estándar

Media	μ	100	➡	**μ**	**0**
Desviación estándar	σ	20		**σ**	**1**

Cualquier variable aleatoria normal puede transformarse en una variable normal estándar usando la transformación:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z \sim N(0, 1)$$



(Machain, 2014)

Distribución Normal Estándar

Media	μ	100	➡	**μ**	**0**
Desviación estándar	σ	20		**σ**	**1**

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

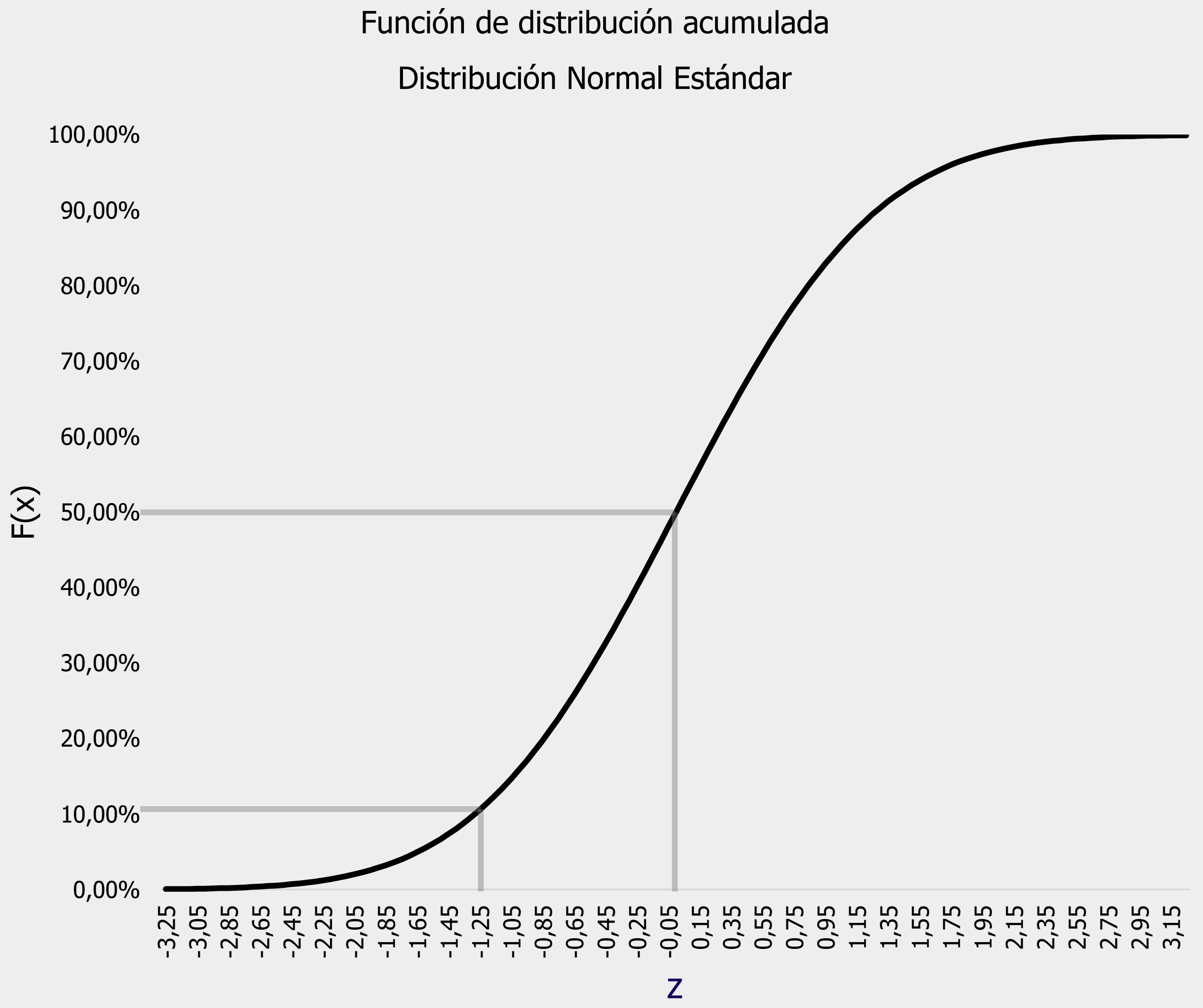
En Excel:

f(z) = DISTR.NORM.ESTAND.N(z; FALSO)

F(z) = DISTR.NORM.ESTAND.N(z; VERDADERO)

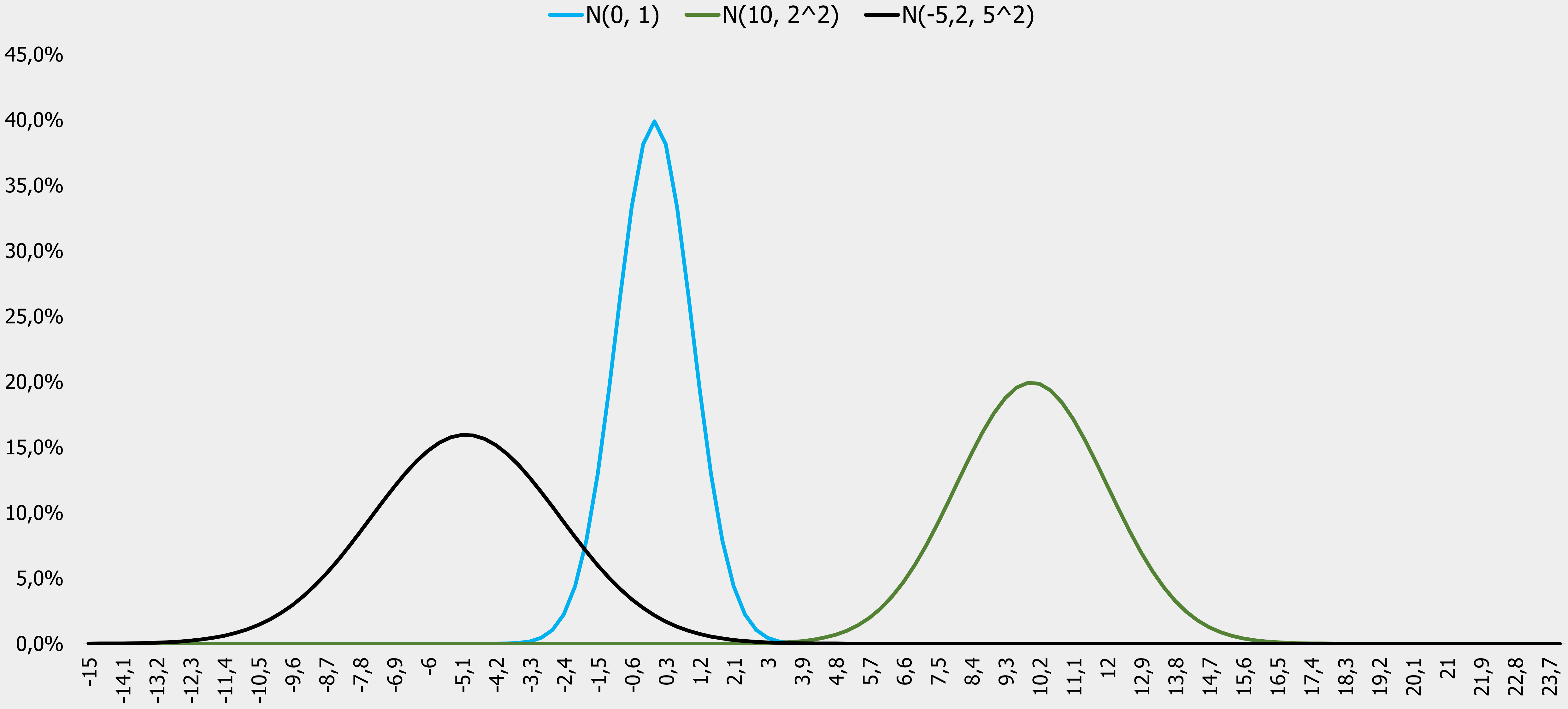
z = INV.NORM.ESTAND(probabilidad) → $F^{-1}(z)$

Si x = 75	Si x = 100
z = -1,25	z = 0
F(x) = 10,56%	F(x) = 50%



(Machain, 2014)

Distribución Normal



(Machain, 2014)

Distribución Triangular

Útil cuando se tiene poca información histórica o solo se tiene el criterio de expertos.

Parámetros:

- Valor mínimo: a.
- Valor máximo: c.
- Valor más probable: c. $a < b < c$. Es la moda.

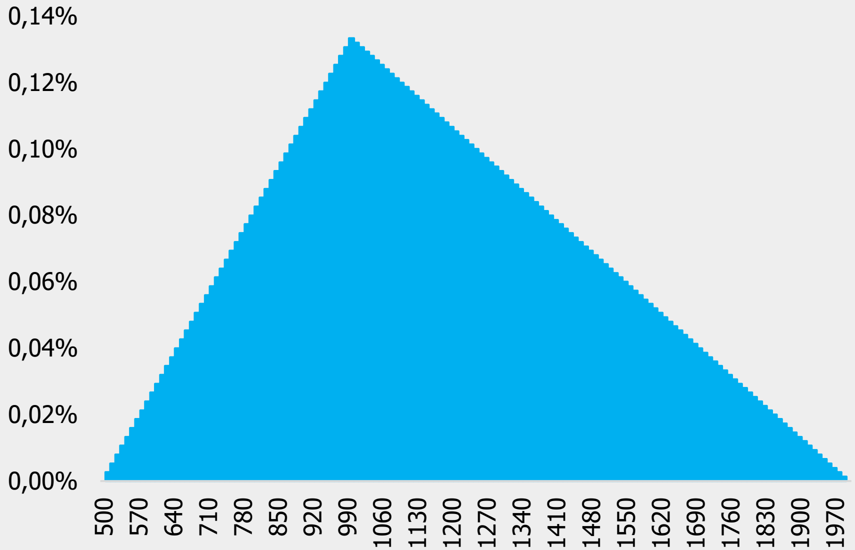
En Excel: no hay función para la Densidad de Probabilidad para esta distribución.

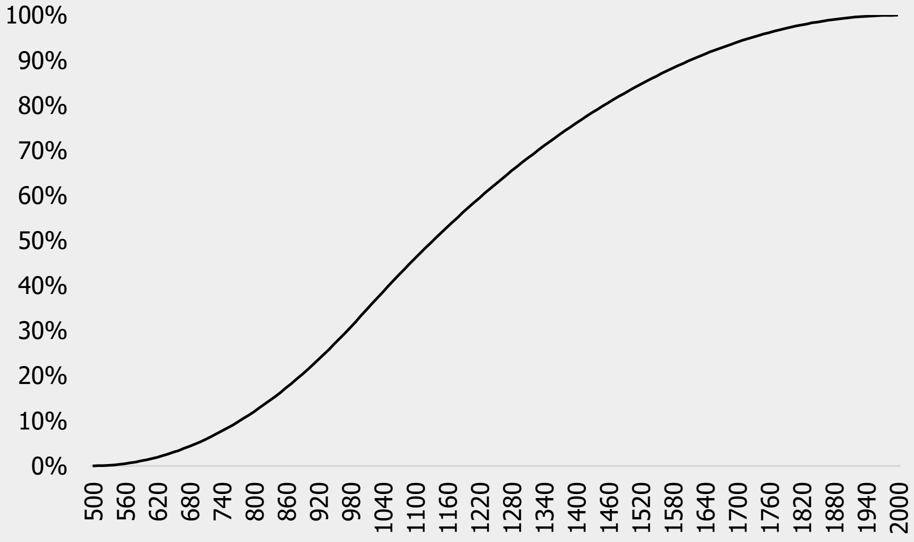
Función de densidad de probabilidad (Probability density function -PDF):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & para\ a \leq x \leq b \\ \dfrac{2(c-x)}{(c-b)(c-a)}, & para\ b < x \leq c \end{cases}$$

Función de distribución acumulada (Cumulative distribution function - CDF):

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)}, & para\ a \leq x \leq b \\ 1 - \dfrac{(c-x)^2}{(c-b)(c-a)}, & para\ b < x \leq c \end{cases}$$





(Machain, 2014)

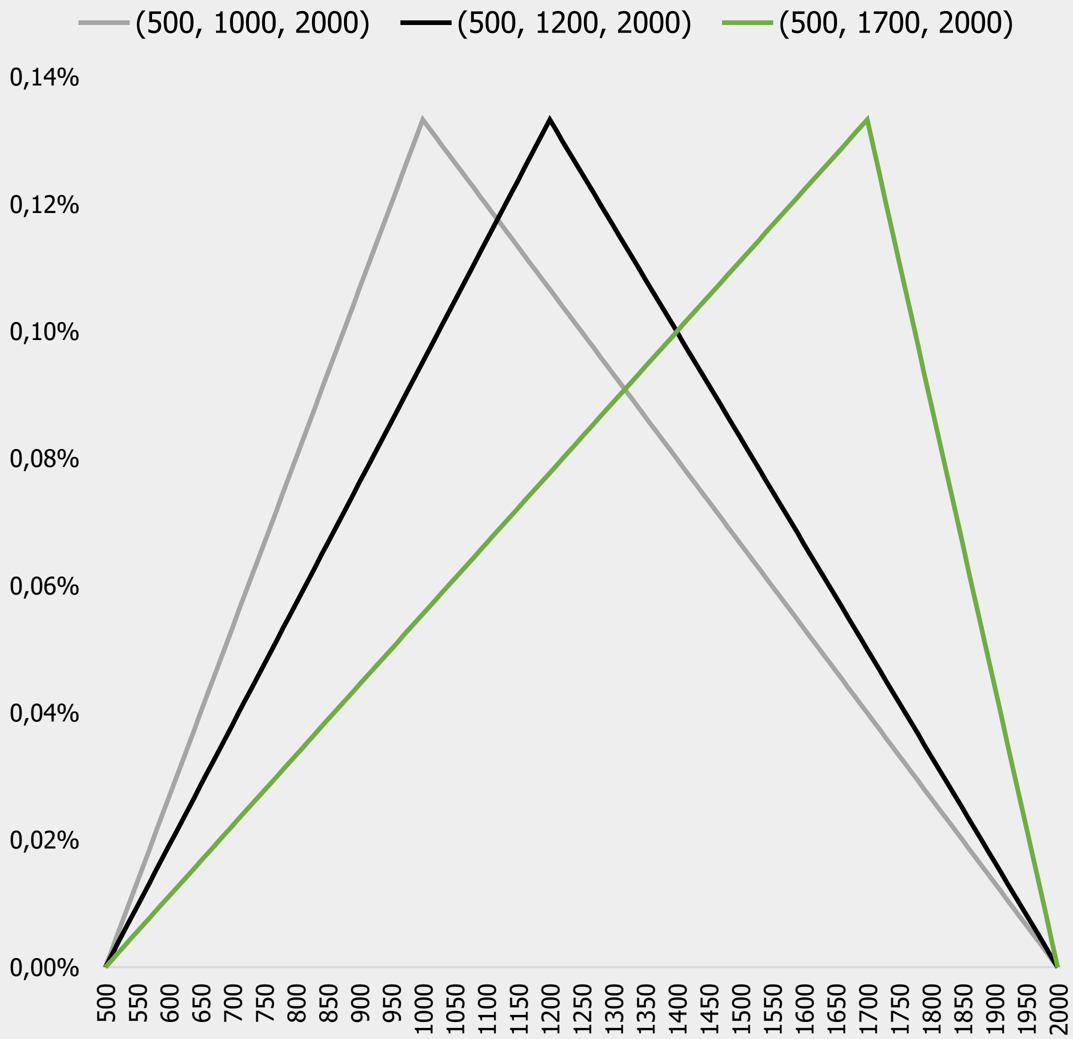
Distribución Triangular

Inversa de la Función de distribución acumulada:

x = $F^{-1}(x)$

$$x = a + \sqrt{P(<x)(b-a)(c-a)}, \qquad \text{si } P(<x) \leq \frac{b-a}{c-a}$$

$$x = c - \sqrt{[1-P(<x)](c-b)(c-a)}, \qquad \text{si } P(<x) > \frac{b-a}{c-a}$$



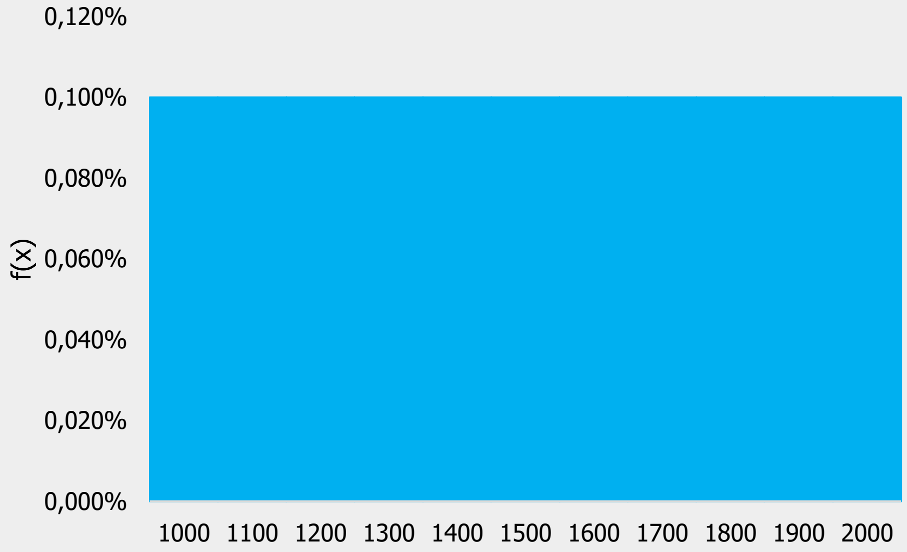
(Machain, 2014)

Distribución Uniforme Continua

Útil cuando no se sabe el comportamiento de los datos y solo se conoce un mínimo y un máximo (parámetros).

Todos valores entre el rango tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Mínimo = 1000, Máximo = 2000



Función de densidad de probabilidad (Probability density function -PDF):

$$f(x) = \frac{1}{máximo - mínimo}$$

Función de distribución acumulada (Cumulative distribution function - CDF):

$$F(x) = \frac{x - mínimo}{máximo - mínimo}$$

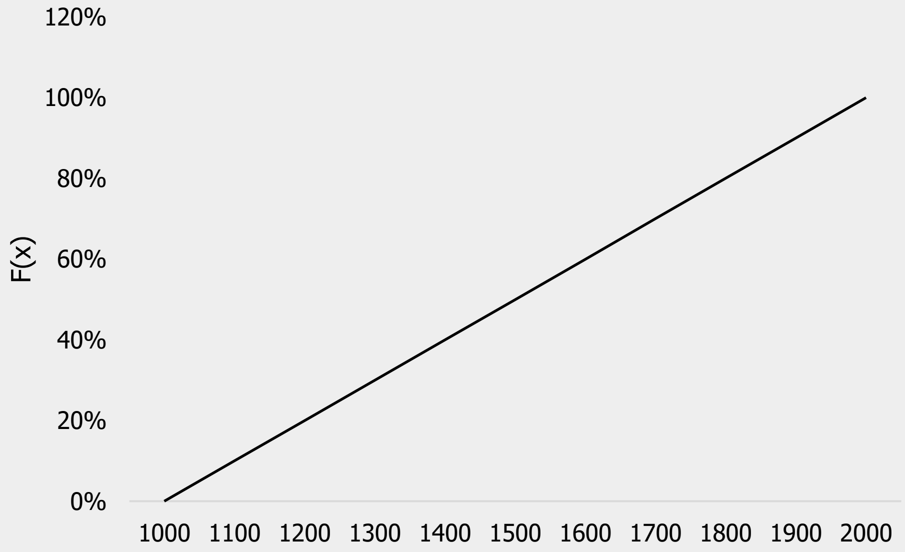
(Machain, 2014)

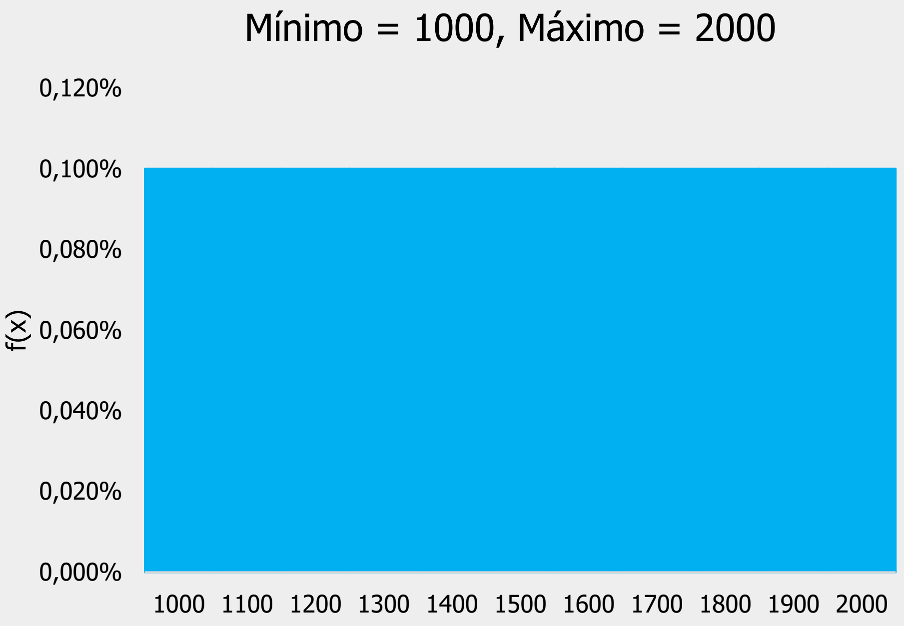
Distribución Uniforme Continua

Inversa de la Función de distribución acumulada:

$x = F^{-1}(x)$

$x = \text{mínimo} + P(<x)(\text{máximo} – \text{mínimo})$





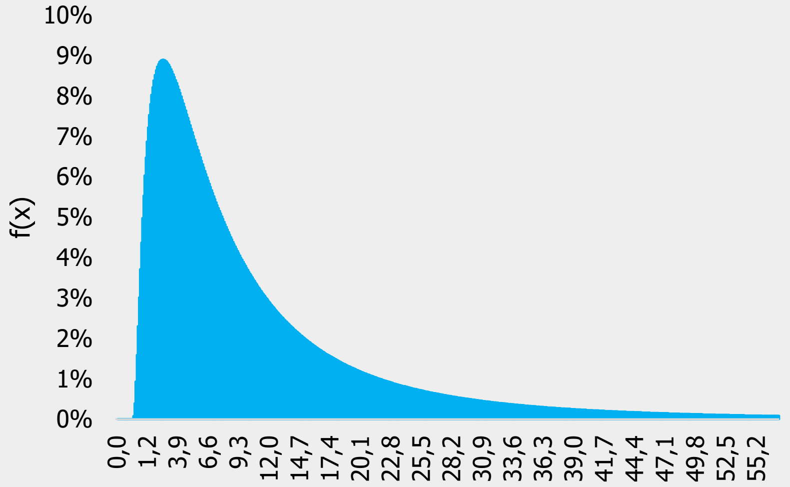
(Machain, 2014)

Distribución Lognormal

Distribución sesgada hacia la derecha.

Valores superiores a cero (solo valores positivos).

Aplicada a los precios de las acciones.



Función de densidad de probabilidad (Probability density function -PDF):

$$f(\ln(x)) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

En Excel: =DISTR.LOGNORM(x; μ; σ; FALSO)

μ y σ → ln(x)

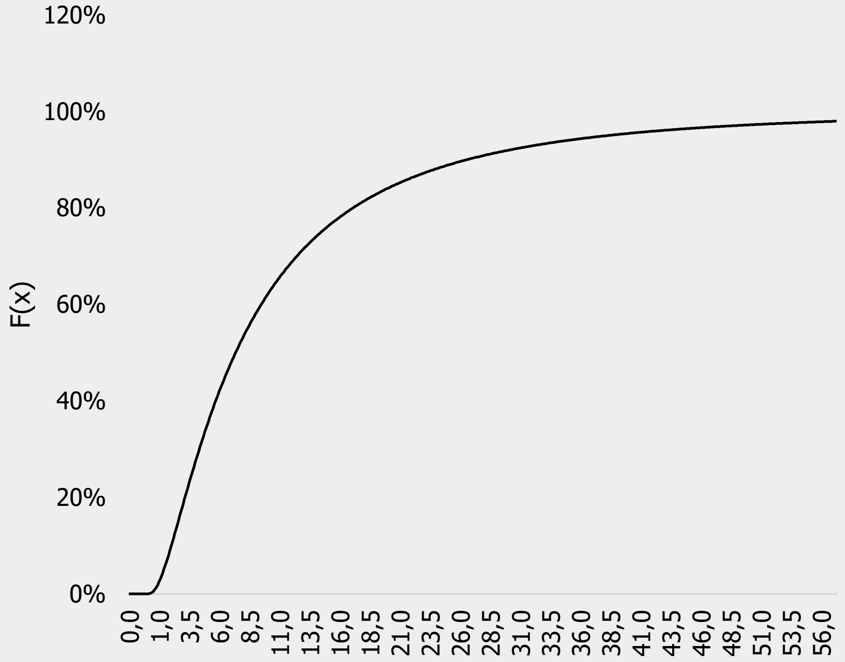
Función de distribución acumulada (Cumulative distribution function - CDF):

$$F(\ln(x)) = \Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$$

En Excel: =DISTR.LOGNORM(x; μ; σ; VERDADERO)

μ y σ → ln(x)

Φ CDF de una normal estándar.



(Machain, 2014)

Distribución Lognormal

Inversa de la Función de distribución acumulada:

$x = F^{-1}(x)$

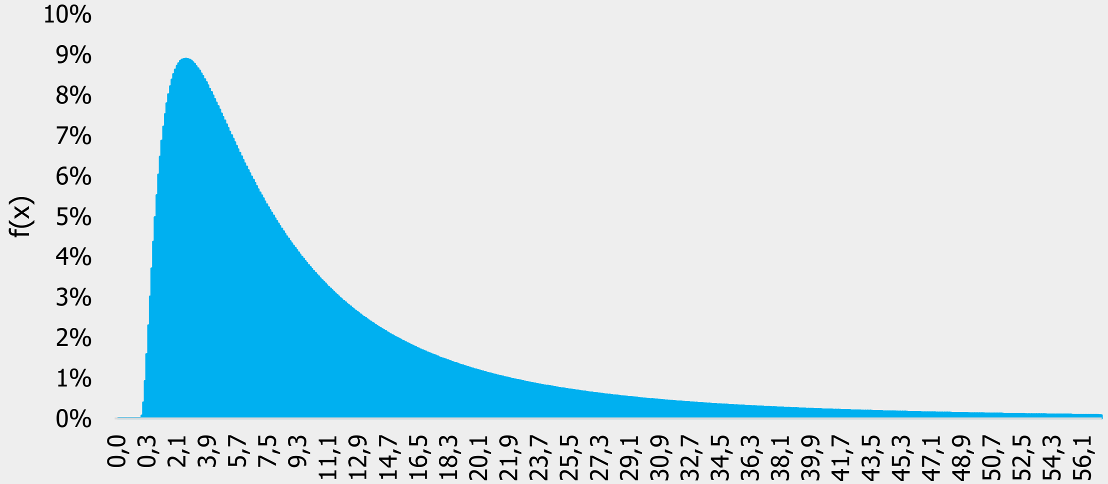
Dado P(< x) :

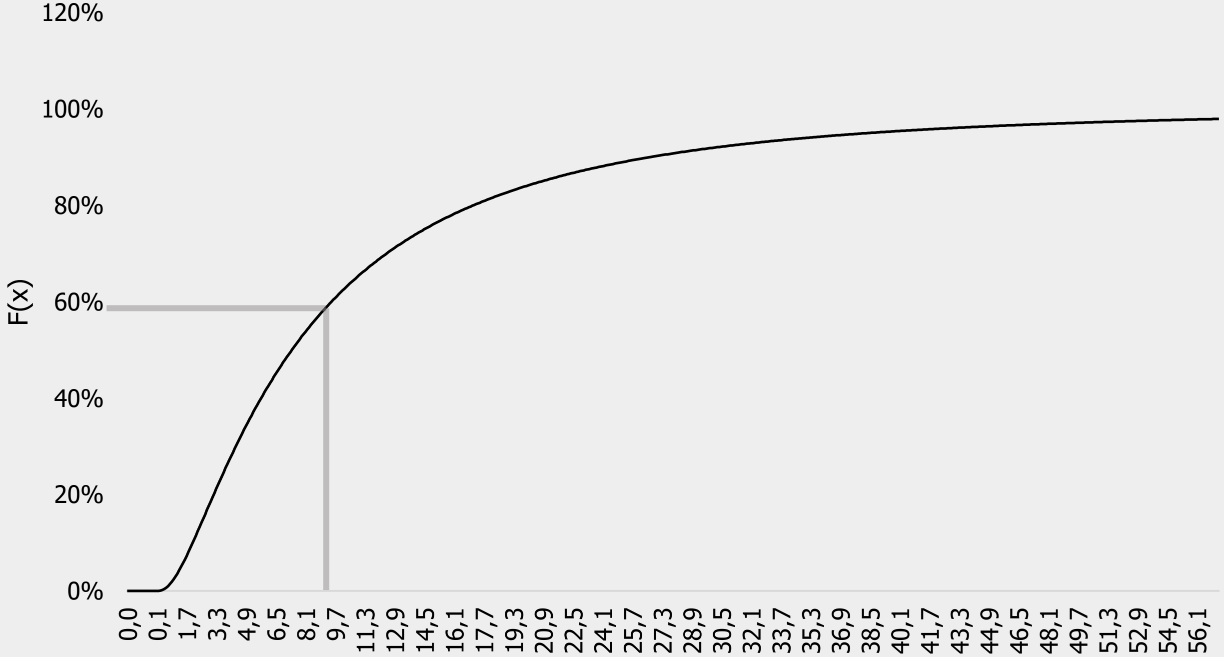
En Excel:

x = DISTR.LOG.INV(probabilidad; μ; σ)

Si F(ln(x)) = 60% (probabilidad)

x = 9,52





(Machain, 2014)

Resumen distribuciones continuas

Distribución	Parámetros	f(x) Probabilidad individual	F(x) Probabilidad acumulada	$F^{-1}(\cdot)$
Normal	μ σ	DISTR.NORM(x; μ; σ; FALSO)	DISTR.NORM(x; μ; σ; VERDADERO)	x=DISTR.NORM.INV($P(< x)$; μ; σ)
Normal Estándar	μ σ	DISTR.NORM.ESTAND.N(z; FALSO)	DISTR.NORM.ESTAND.N(z; VERDADERO)	z=INV.NORM.ESTAND($P(< x)$)
Triangular	Mínimo (a) Más probable (b) Máximo (c)	$f(x)=\begin{cases}\frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, para\ a \le x \le b \\ \frac{2(c-x)}{(c-b)(c-a)}, para\ b < x \le c\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}\frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)}, para\ a \le x \le b \\ 1-\frac{(c-x)^2}{(c-b)(c-a)}, para\ b < x \le c\end{cases}$	x= a + $\sqrt{P(< x)(b-\text{a})(c-a)}$, si $P(< x) \le \frac{b-a}{c-a}$ x= c - $\sqrt{[1-P(< x)](\text{c}-\text{b})(c-a)}$, si $P(< x) > \frac{b-a}{c-a}$
Uniforme continua	Mínimo Máximo	$\frac{1}{máximo - mínimo}$	$\frac{x - mínimo}{máximo - mínimo}$	x = mínimo + P(<x)(máximo – mínimo)
Lognormal	μ → ln(x) σ → ln(x)	DISTR.LOGNORM(x; μ; σ; FALSO)	DISTR.LOGNORM(x; μ; σ; VERDADERO)	x = DISTR.LOG.INV($P(< x)$; μ; σ)

Distribuciones de probabilidad discreta

Distribución Bernoulli

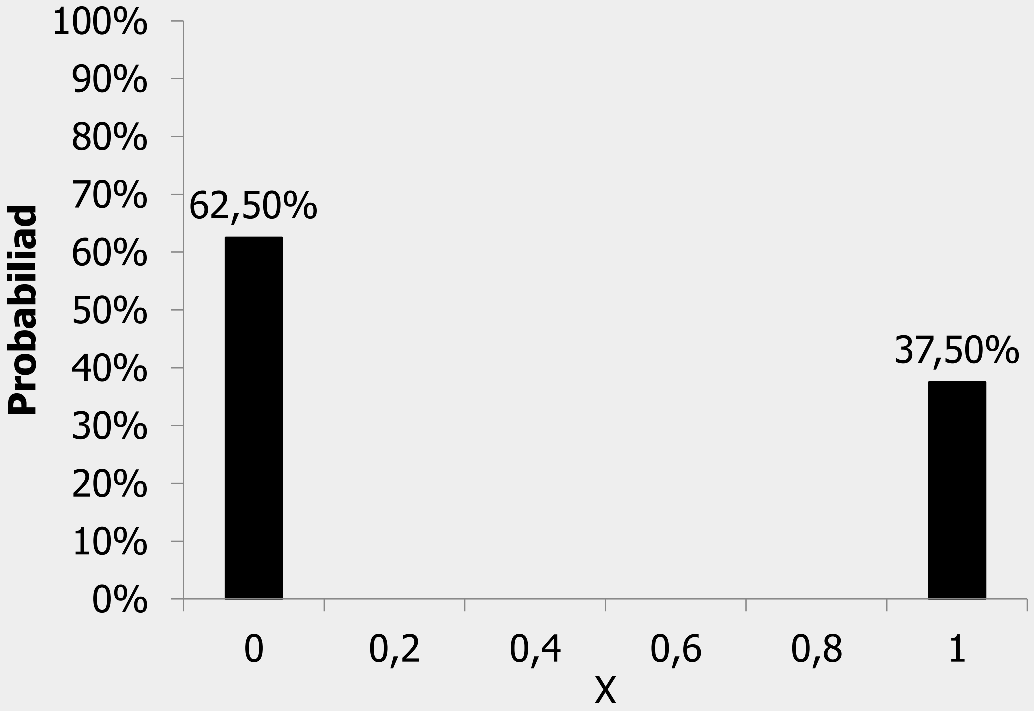
Dos posibles resultados:

1. Éxito: se asocia con el valor de 1. Tiene una probabilidad de ocurrencia de p.
2. Fracaso: se asocia con el valor de 0. Tiene una probabilidad de ocurrencia de $q = 1 - p$.

La suma de las probabilidad siempre tiene que dar 100%.

$$f(x;p) = \begin{cases} p, & si\ x = 1 \\ q = 1 - p, & si\ x = 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

¿Escenarios y probabilidades en el lanzamiento de una moneda?



(Machain, 2014)

Distribución Binomial

Se basa en la distribución Bernoulli pero con pruebas independientes entre si.

Solo tiene en cuenta un resultado en los ensayo, por ejemplo, solo Éxitos.

Función de densidad de probabilidad (Probability density function - PDF):

$$f(x;n;p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$$

En Excel: f(x)= DISTR.BINOM (núm. éxitos; ensayos; prob. éxito; FALSO)

$f(x;n;p)$: indica la probabilidad de x casos de éxito en n ensayos independientes con una probabilidad histórica para cada éxito igual a p.

Función de distribución acumulada (Cumulative distribution function - CDF):

$$F(x;n;p) = \sum_{i=0}^{x} p^i (1-p)^{(n-i)}$$

En Excel: f(x)= DISTR.BINOM (núm. éxitos; ensayos; prob. éxito; VERDADERO)

(Machain, 2014)

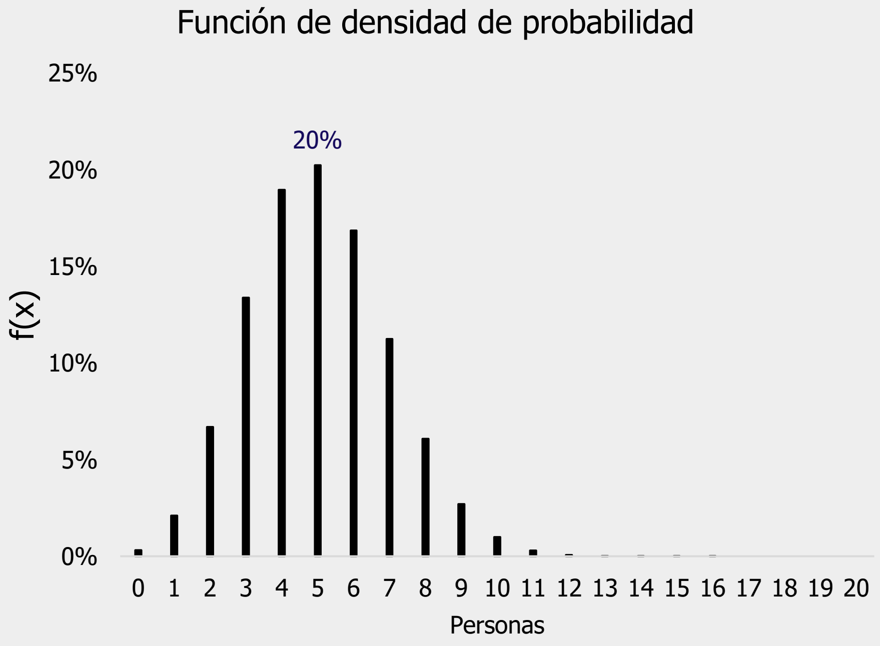
Distribución Binomial

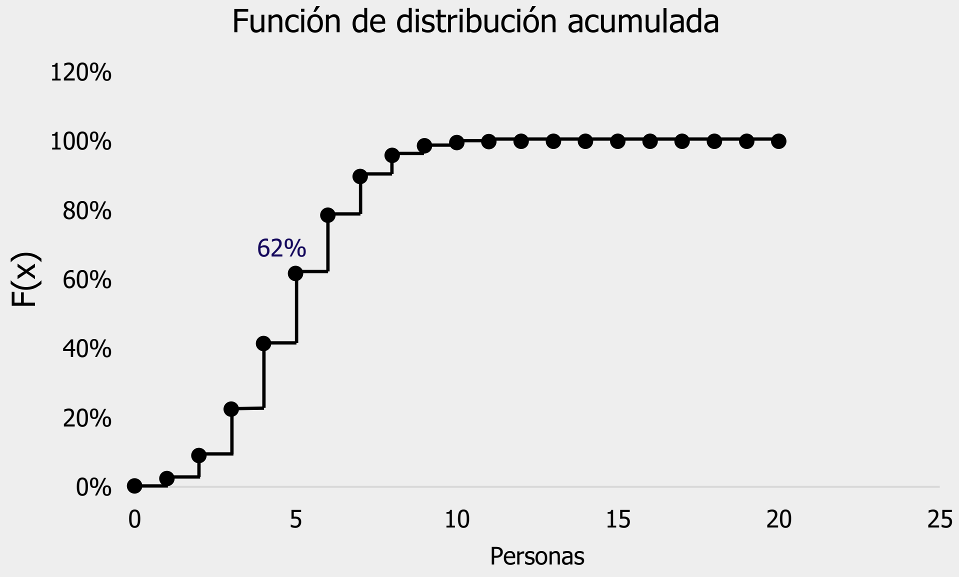
Se ofreció un producto a 20 personas donde sólo 5 personas lo compraron, ¿cuál es la probabilidad de compra?

f(x)= DISTR.BINOM (núm. éxitos; ensayos; prob. éxito; FALSO)

f(x)= DISTR.BINOM (5; 20; 25%; FALSO) = 0,2023

La probabilidad de que 5 clientes realicen una compra sobre 20 personas a las que se les ofreció el producto es de 20,23%

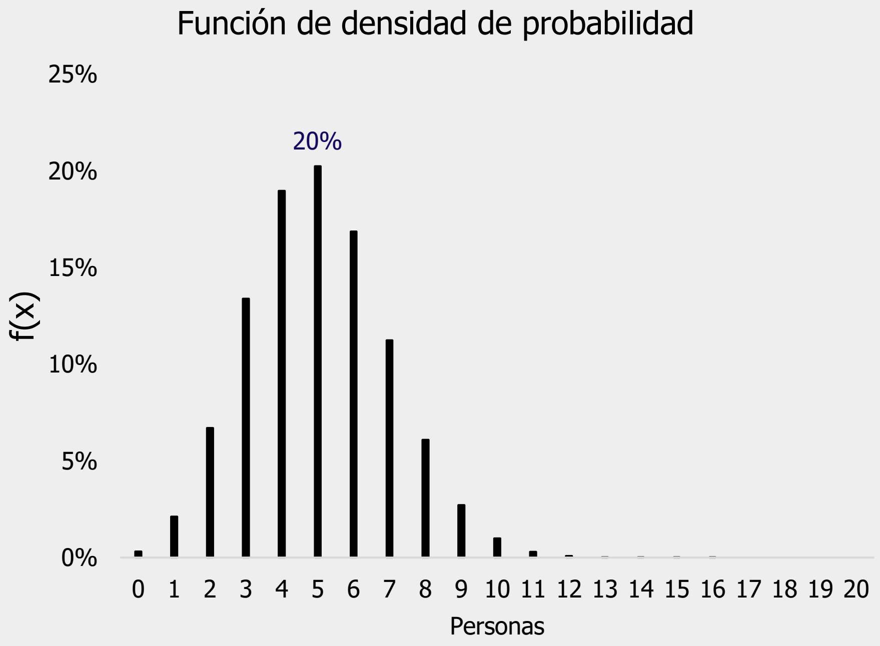




(Machain, 2014)

Distribución Binomial

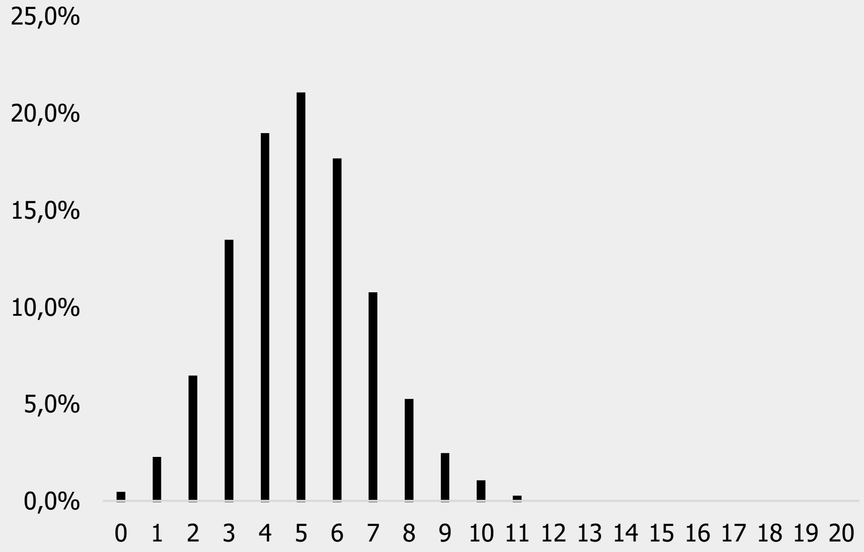
Distribución teórica:



Distribución simulada con 1.000 iteraciones:

En Excel:

x = INV.BINOM(ensayos; prob. éxito; probabilidad)



(Machain, 2014)

Distribución Discreta (empírica)

Conjunto de valores cada uno con su respectiva probabilidad de ocurrencia.

Es útil al momento de obtener diversos escenarios donde no se tienen registros teóricos previos; sino que la información es otorgada por eventos especulativos.

Función de densidad de probabilidad (Probability density function - PDF):

$$f(x,p) = \begin{cases} p_i, & x = x_i \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

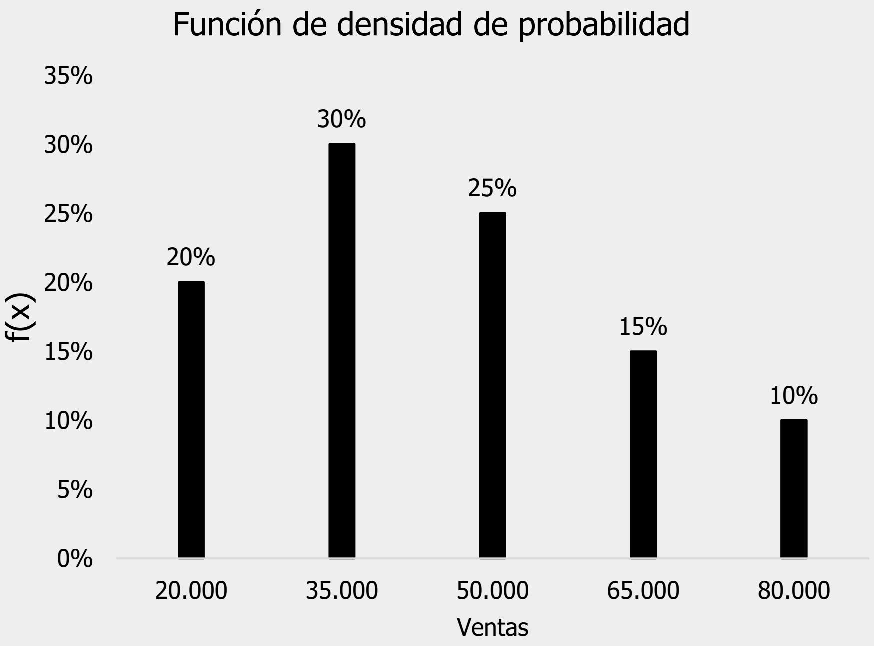
Función de distribución acumulada (Cumulative distribution function - CDF):

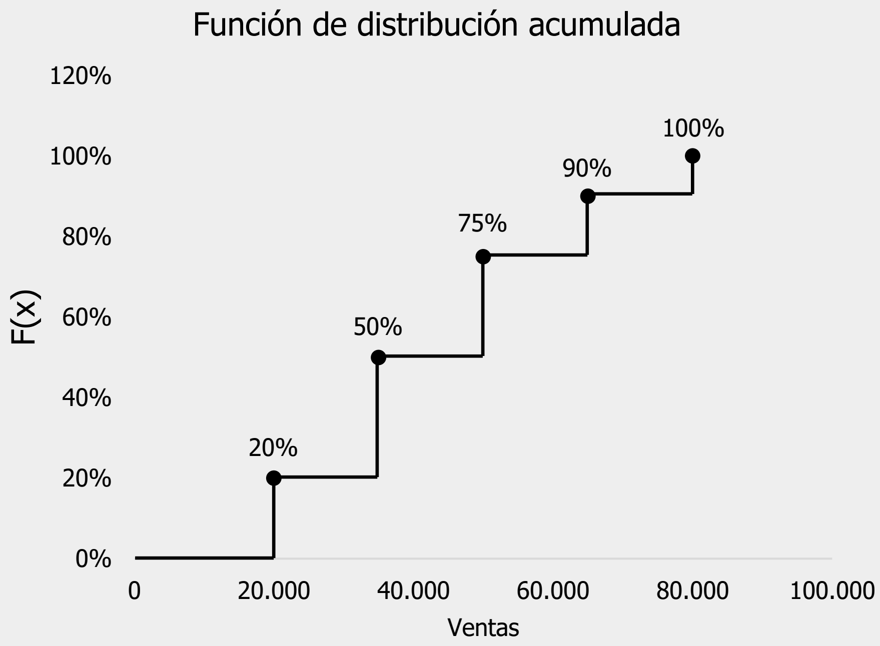
$$F(x,p) = \begin{cases} 0, & para\ x < x_i \\ \sum_{i=1}^{n} p_i\,, & para\ x_i \leq x \leq x_n \\ 1, & para\ x > x_n \end{cases}$$

(Machain, 2014)

Distribución Discreta (empírica)

Escenario	Ventas	Probabilidad de ocurrencia	Probabilidad de ocurrencia acumulada
1	20.000	20%	20%
2	35.000	30%	50%
3	50.000	25%	75%
4	65.000	15%	90%
5	80.000	10%	100%





(Machain, 2014)

Distribución Uniforme discreta

Cada uno de los posibles escenarios o resultados tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

En la distribución discreta cada escenario puede tener una probabilidad de ocurrencia diferente.

Función de densidad de probabilidad (Probability density function - PDF):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}, & para\ x \in\ x_i \\ 0\,, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Función de distribución acumulada (Cumulative distribution function - CDF):

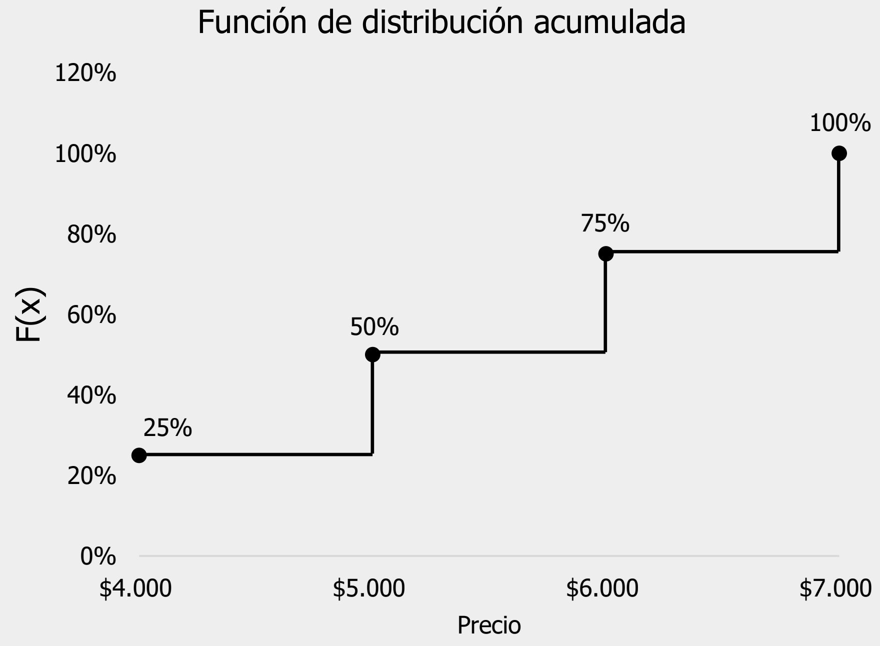
$$F(x) = \begin{cases} 0, & para\ x <\ x_i \\ \dfrac{i}{N}, & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 1, & para\ x \geq\ x_N \end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado el resultado sea el número 3?

(Machain, 2014)

Distribución Uniforme discreta

Escenario	Precio	Probabilidad de ocurrencia	Probabilidad de ocurrencia acumulada
1	$ 4.000	25%	25%
2	$ 5.000	25%	50%
3	$ 6.000	25%	75%
4	$ 7.000	25%	100%



(Machain, 2014)

Resumen distribuciones discretas

Distribución	Parámetros	f(x) Probabilidad individual	F(x) Probabilidad acumulada	$F^{-1}(\cdot)$
Bernoulli	Prob. éxito	$f(x;p) = \begin{cases} p, & si\ x = 1 \\ q = 1 - p, & si\ x = 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$		
Binomial	núm. éxitos ensayos Prob. éxito	DISTR.BINOM (núm. éxitos; ensayos; prob. éxito; FALSO)	DISTR.BINOM (núm. éxitos; ensayos; prob. éxito; VERDADERO)	INV.BINOM(ensayos; prob. éxito; probabilidad)
Discreta (empírica)	x_i p_i	$f(x,p) = \begin{cases} p_i, & x = x_i \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0, & para\ x < x_i \\ \frac{i}{N}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 1, & para\ x \geq x_N \end{cases}$	
Uniforme discreta	x_i N	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & para\ x \in x_i \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0, & para\ x < x_i \\ \frac{i}{N}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 1, & para\ x \geq x_N \end{cases}$	