

Tasas de interés

Profesor: Miguel Jiménez

Interés

La tasa de interés mide el cambio en el precio en un préstamo.

El **principal** de un préstamo es la cantidad de dinero prestado.

La **tasa de interés** es la **fracción** del principal que debe ser cargado a los intereses por **unidad de tiempo**.

X: principal.

r: tasa de interés [%].

Si r es la fracción de cambio por año, entonces, r es una tasa de interés anual, representará el cambio de X por año.

$$\text{Interés} = rX$$

$$\text{Deuda después de 1 año} = \text{Principal} + \text{Interés}$$

$$= X + rX$$

$$= (1 + r)X$$

Tasa de interés

Tasa de interés simple:

Los intereses no se reinvierten o capitalizan.

No se generan nuevos intereses.

El lo mismo recibir intereses de forma vencida o anticipada.

$$(1 + r)X + (1 + r)X + (1 + r)X$$

Tasa de interés compuesta:

Los intereses sí capitalizan.

Los intereses generan más intereses.

Los intereses generados son reinvertidos en el momento de ser recibidos y generan más intereses incluyendo el capital inicial. Con esto se obtiene un nuevo capital.

$$(1 + r).(1 + r).(1 + r)X$$

Interés

Una inversión de X a 2 años con una tasa de interés compuesta anual de r .

Inversión al primer año: $(1 + r)X$

Los intereses del segundo año serán sobre el valor de la inversión después de 1 año. Este será el principal para generar los intereses del año 2.

Inversión al segundo año:

$$(1 + r)(1 + r)X = X(1 + r)^2$$

Este es el **Valor Futuro** de la inversión

Interés

Las tasas de interés son diferentes dependiendo del plazo. Generalmente, las tasas de interés con mayor plazo son más altas. Esto se conoce como estructura de tasas de interés.

r_t : tasa de interés para el período t .

r_1 : tasa de interés anual para 1 año.

r_2 : tasa de interés anual para 2 años.

r_3 : tasa de interés anual para 3 años.

Estas son tasas compuestas anuales. Los intereses se generan cada año hasta llegar al vencimiento t .

Valor Futuro y Valor Presente

Valor Futuro (VF): valor de la inversión en el período t después de sumados los intereses cargados de cada período.

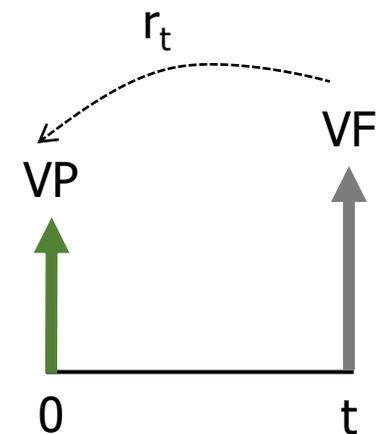
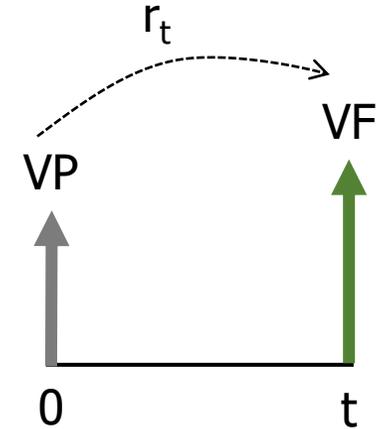
Valor Presente (VP): valor inicial de la inversión. Es el valor de X .

Al invertir el VP a una tasa de interés r_t , t períodos, se obtiene el VF:

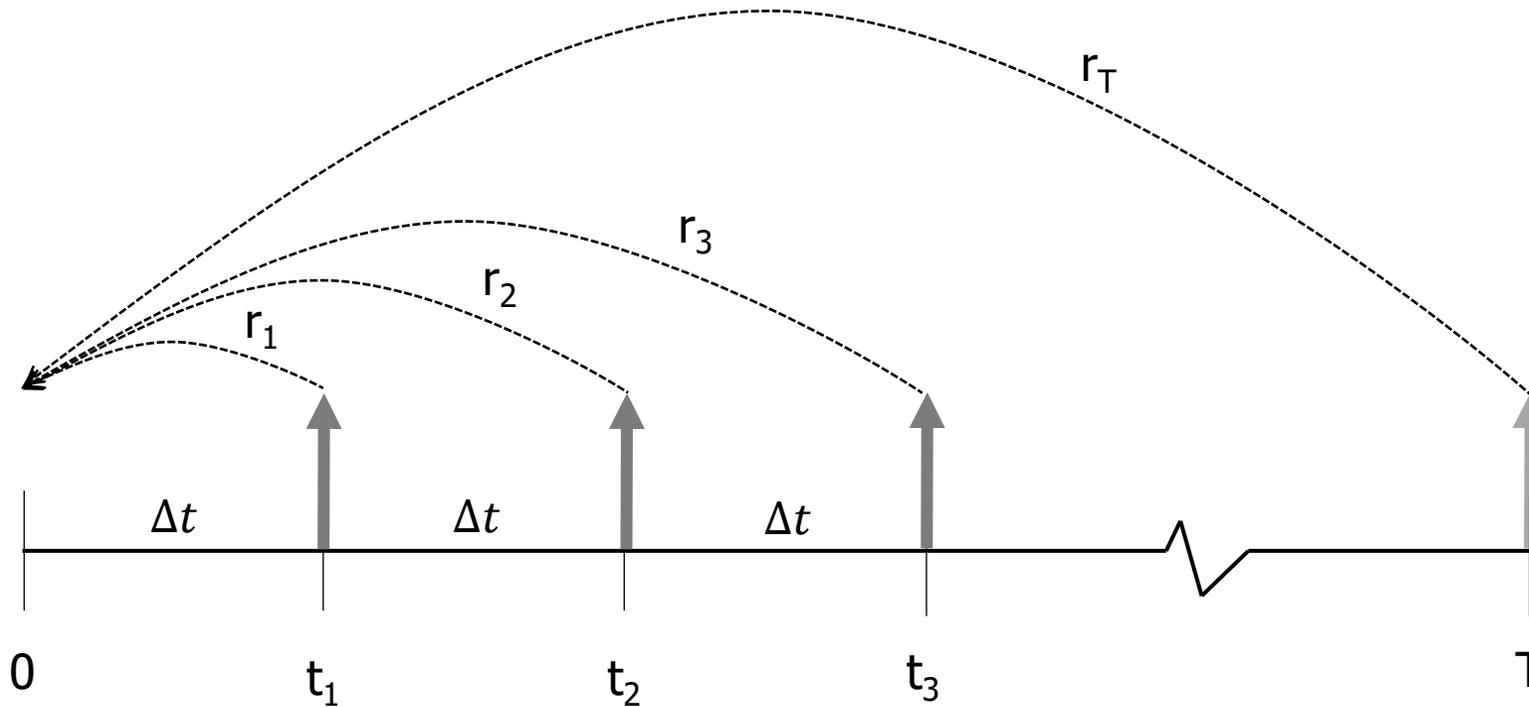
$$VF = VP(1 + r_t)^t$$

Si tenemos el VF de una inversión, la tasa de interés r_t y la cantidad de períodos t que la tasa generó intereses, podemos hallar el VP:

$$VP = VF(1 + r_t)^{-t} = \frac{VF}{(1 + r_t)^t}$$



Valor Futuro y Valor Presente



Δt : tiempo entre períodos

Factor de descuento

Factor de descuento: FD

$$VP = VF(1 + rt)^{-t} = \frac{VF}{(1 + r_t)^t}$$

$$VP = 100 \frac{1}{(1 + 0,05)^3}$$

$$VP = VF \frac{1}{(1 + r_t)^t}$$

$$VP = 100 \times 0,8638$$

$$FD_t = \frac{1}{(1 + r_t)^t}$$

$$FD = 0,8638$$

$$VP = VF \times FD_t$$

$$VP = 86,38$$

Tasas periódicas

Las tasas de interés pueden generar intereses m veces por año. Estas son tasas periódicas.

Las tasas compuestas anuales capitalizan interés una vez al año, las periódicas capitalizan m veces al año.

m : frecuencia de capitalización en el año.

1% Efectiva Mensual (E.M.): capitaliza 12 veces al año.

1% Efectiva Trimestral (E.T.): capitaliza 4 veces al año.

1% Efectiva Semestral (E.S.): capitaliza 2 veces al año.

1% Efectiva Anual (E.A.): capitaliza una vez al año. Es la tasa compuesta anual anteriormente usada.

Ejemplos

Un CDT entrega 4% E.A. por un año. Si invertimos \$10 millones, ¿cuánto será nuestra inversión al año?

$$VP = 10$$

$$r = 4\% \text{ E.A.}$$

$$t = 1 \text{ año.}$$

$$VF = ?$$

$$VF = 10(1 + 0,04)^1 = 10,4$$

Si el CDT se renueva por otro año a la misma tasa, ¿cuál es el valor de la inversión en el año 2?

$$VP = 10$$

$$r = 4\% \text{ E.A.}$$

$$t = 2 \text{ año.}$$

$$VF = ?$$

$$VF = 10(1 + 0,04)^2 = 10,816$$

Ejemplos

Una inversión de \$10 millones promete pagar 0,7% E.M. cada mes por año y medio, ¿cuál es el valor de la inversión al año y medio si los intereses fueron reinvertidos a la misma tasa del 0,7% E.M.?

$$VP = 10$$

$$r = 0,7\% \text{ E.M.}$$

$$t = 1,5 \text{ años} = 18 \text{ meses}$$

$$VF = ?$$

$$VF = 10(1 + 0,007)^{18} = 11,338$$

Si al final del año y medio de la inversión anterior se reinvierte el dinero por 6 meses a una tasa de 2% E.S. ¿cuál es el valor de la inversión a los 2 años?

$$VF = 10(1 + 0,007)^{18}(1 + 0,02)^1 = 11,565$$

Tasas nominales

No lleva implícita la capitalización de intereses.

Dependiendo de la periodicidad, se pagan varios intereses en el año.

En estas tasas se especifica la periodicidad, ejemplo: mes, trimestre, semestre, etc.

12% NAMV: 12% nominal anual mes vencido.

Con esta tasas que se expresa en términos nominales del 12% se pagan 12 intereses en 1 año del 1% en cada período.

Tasa nominal: 12% NAMV.

Tasa periódica o efectiva: 1% E.M.

$$\text{Tasa efectiva} = \frac{\text{Tasa nominal}}{m}$$

Conversión de tasas de interés

Las tasas de interés son **equivalentes** si conducen al mismo retorno o VF.

$$VF = VP(1 + rt)^t$$

r_t^m : tasa de interés vigente hasta t con que capitaliza **m** veces al año.

r_t^k : tasa de interés vigente hasta t con que capitaliza **k** veces al año.

$$VP(1 + r_t^m)^{mt} = VP(1 + r_t^k)^{kt}$$

$$r_t^m = (1 + r_t^k)^{k/m} - 1$$

Conversión de tasas de interés

Si tenemos 12% E.A., ¿cuál es la tasa equivalente en E.M.?

$$r = (1 + 0,12)^{1/12} - 1 = 0,00949 \quad 0,949\% \text{ E.M.}$$

Prueba:

$$30(1 + 0,12) = 33,600$$

$$30(1 + 0,00949)^{12} = 33,600$$

Rentabilidad

v_t : valor inversión en t.

v_{t-1} : valor inversión en t - 1

$v_t - v_{t-1}$: es lo que se ganó en la inversión. Es una fracción o porcentaje de la inversión inicial

v_{t-1}

$$\text{Rentabilidad} = \frac{v_t - v_{t-1}}{v_{t-1}}$$

$$\text{Rentabilidad} = \frac{v_t}{v_{t-1}} - 1$$

$$\text{Rentabilidad} = \frac{VF}{VP} - 1$$

$$\text{Rentabilidad} = \frac{V_{\text{Final}}}{V_{\text{inicial}}} - 1$$

Rentabilidad

Se invierte \$30 millones por un año a una tasa de 12% E.A.

$$30(1 + 0,12) = 33,600$$

$$\text{Rentabilidad} = \frac{33,600}{30} - 1 = 0,12$$

Se invierte \$30 millones por un año a una tasa de 1% E.M.

$$30(1 + 0,01)^{12} = 33,805$$

$$\text{Rentabilidad} = \frac{33,805}{30} - 1 = 0,1268$$

Tasas compuestas continuas

Cuando las tasas de interés se capitalizan continuamente, es decir, a intervalos infinitamente pequeños, se dice que las tasas son continuas.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = e^{rt} - 1$$

r_c : tasa compuesta continua.

$$VF = VP e^{r_c t}$$

$$VP = VF e^{-r_c t}$$

Tasas compuestas continuas

Equivalencias entre tasas compuestas y tasas compuesta continuas:

r_c : tasa compuesta continua.

r : tasa compuesta.

$$VPe^{r_c t} = VP(1 + r)^t$$

$$r_c t = t \ln(1+r)$$

$r_c = \ln(1+r)$  Convertir tasas compuestas a tasas compuestas continuas.

$r = e^{r_c} - 1$  Convertir tasas compuestas continuas a tasas compuestas.

Tasas compuestas continuas

Una inversión de \$30 millones promete pagar 12% E.A. por dos años, ¿cuál es el valor futuro de la inversión con tasas compuestas y tasas compuestas continuas?

$$VF = 30(1 + 0,12)^2 = 37,632$$

Compuesta Continua Anual

$$r_c = \ln(1 + 0,12) = 0,1133 \quad 11,33\% \text{ CCA}$$


$$VF = 30e^{0,1133 \times 2} = 37,632$$

Tasas de interés del mercado

DTF:

<https://www.banrep.gov.co/es/estadisticas/tasas-captacion-semanales-y-mensuales>

TES Colombia:

- https://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc/Home/Mercados/enlinea/rentafija?com.tibco.ps.pagesvc.renderParams.sub5d9e2b27_11de9ed172b_-73dc7f000001=action%3Dbuscar%26org.springframework.web.portlet.mvc.ImplicitModel%3Dtrue%26
- <https://www.banrep.gov.co/es/estadisticas/tes>

TES Estados Unidos:

<https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/pages/TextView.aspx?data=yieldYear&year=2020>

IBR (Colombia):

<https://www.banrep.gov.co/es/estadisticas/indicador-bancario-referencia-ibr>

LIBOR (USD, GBP, EUR, JPY, CHF):

- <https://www.theice.com/marketdata/reports/170>
- <https://www.investopedia.com/terms/l/libor.asp>

Tasas de interés

Gracias

Profesor: Miguel Jiménez