VaR Varianzas-Covarianzas

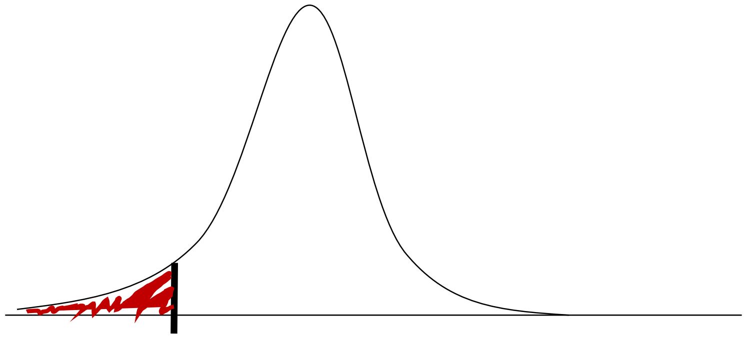
Profesor: Miguel Jiménez

VaR

Value at Risk – VaR – Valor en Riesgo

Representa la máxima pérdida potencial en valor de un portafolio de instrumentos financieros con una probabilidad dada sobre un horizonte de tiempo.

Pérdida, probabilidad y tiempo.



VaR

El VaR es un número que indica cuánto se puede perder con una probabilidad sobre un horizonte de tiempo.

Bajo condiciones normales de mercado

VaR

Value at Risk – VaR – Valor en Riesgo

El valor en riesgo es una medida estadística de riesgo de mercado que estima la pérdida máxima que podría registrar un portafolio o un activo en un intervalo de tiempo y con cierto nivel de probabilidad o confianza.

El VaR es una medida en la que se realiza el análisis estadístico de las tendencias históricas del mercado y su volatilidad, para conocer la probabilidad de pérdida de cierta cantidad de dinero correspondiente a un portafolio.

El VaR de un portafolio está en función de tres parámetros: el horizonte del tiempo, t, el nivel de confianza, α, y la volatilidad, σ. Este es el nivel de pérdida durante un período de tiempo de longitud t que no será excedido con una probabilidad de $(1 - \alpha)\%$.

VaR

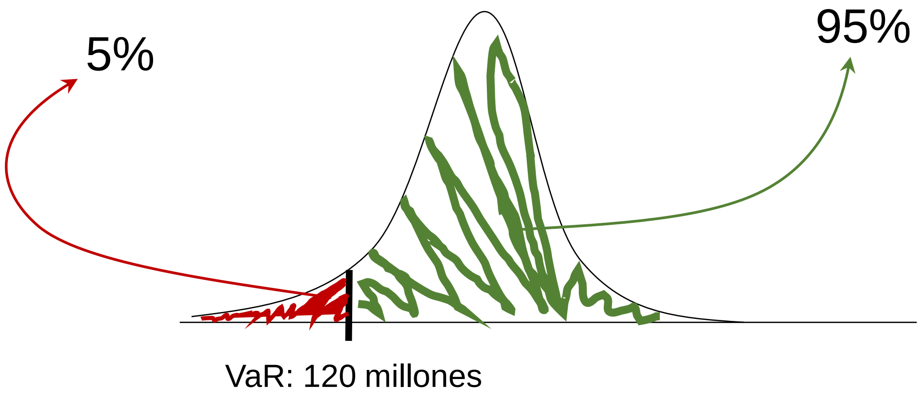
Ejemplos:

El VaR al 95% diario es de 120 millones de pesos:

Significa que de 100 días 95 días se podría perder menos de 120 millones de pesos diario. Esto implica que durante 5 días la pérdida podría ser más de 120 millones de pesos diario.

De otra forma, aproximadamente 19 días de 20 días, las pérdidas diarias serán menores a 120 millones de pesos. Entonces, aproximadamente 1 de cada 20 días, las pérdidas diarias serán superiores a 120 millones de pesos.

$$\alpha = 5\%$$



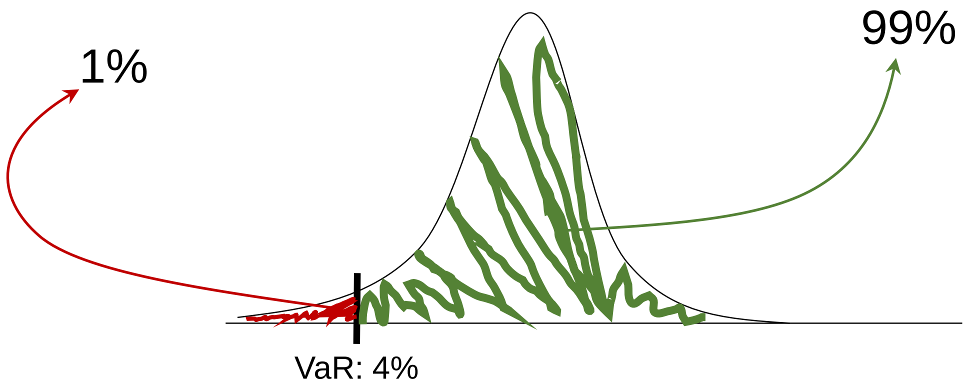
VaR

Ejemplos:

El VaR al 99% diario es de 4%:

Significa que de 100 días 99 días se podría perder menos del 4%. Esto implica que durante 1 día la pérdida podría ser más del 4%.

$$\alpha = 1\%$$



Parámetros del VaR

Nivel de confianza: α

Cuanto mayor sea el nivel de confianza, mayor será la medida VaR.

A medida que aumenta, el número de ocurrencias por debajo del VaR se reduce, lo que lleva a mediciones deficientes de pérdidas grandes pero poco probables. Con 1000 observaciones, por ejemplo, VaR puede tomarse como la 10ma observación más baja para un nivel de confianza del 99%. Si el nivel de confianza aumenta a 99.9%, VaR se toma solo de la observación más baja.

La recomendación habitual es elegir un nivel de confianza que no sea demasiado alto, como 95% a 99%.

Parámetros del VaR

Horizonte de tiempo: t

Cuanto más largo es el horizonte, mayor es la medida VaR.

Basilea y SFC: 10 días con un nivel de confianza del 99%.

El período de 10 días corresponde al tiempo requerido para que los reguladores bancarios tomen medidas correctivas en caso de que una institución comience a tener problemas. Probablemente también, el nivel de confianza del 99 por ciento corresponde a una baja probabilidad de falla bancaria debido al riesgo de mercado.

JP Morgan: 95% de probabilidad en un horizonte de un día.

Metodologías para calcular el VaR

- Método de Varianzas-covarianzas: método analítico, método Delta Normal.
- Simulación Monte Carlo (MSMC)

Métodos paramétricos

Los métodos paramétricos suponen una distribución de probabilidad para el comportamiento del portafolio, la distribución más usada es la normal.

- Método de Simulación Histórica (MSH) → Método no paramétrico

Método analítico (Método de Varianzas-covarianzas)

VaR Delta-Normal o varianzas-covarianzas (sin promedios):

Supuestos: los rendimientos siguen una distribución normal y media de los rendimientos es igual a cero. $\mu = 0$

$$VaR = |Z_\alpha| \times \sigma \quad [\%]$$

$$VaR = |Z_\alpha| \times \sigma \times V_0 \quad [\$]$$

α: es el percentil (1 – nivel de confianza). NC: nivel de confianza.

$|Z_\alpha|$: valor absoluto del valor de z de la distribución normal estándar, N(0,1). $|Z_\alpha| = Z_{NC}$

σ: es la desviación estándar o volatilidad de la acción o portafolio de inversión.

V_0: valor de mercado de la acción o portafolio financiero.

El horizonte de tiempo es la unidad de tiempo de la volatilidad

Nivel de confianza	90,0%	95,0%	97,5%	99,0%
$\lvert Z_\alpha \rvert$	1,282	1,645	1,960	2,326

Método analítico (Método de Varianzas-covarianzas)

Ejemplo:

Se tiene unas acciones valoradas en $300 millones. La acción tiene una volatilidad diaria de 1%. ¿Cuál es el VaR para un nivel de confianza del 99%?

V_0: $300 millones.

VaR diario = $300.000.000 * 1% * 2,326 = $ 6.978.000

σ: 1% diario.

VaR diario = 1% * 2,326 = 2,326%

Z: 2,326 (nivel de confianza del 99%).

Volatilidad y VaR en diferentes horizontes de tiempo

Supuesto: los rendimientos siguen una distribución normal.

Suponiendo 250 días de operaciones al año.

$$\sigma_{anual} = \sigma_{diaria}\sqrt{250} \qquad VaR_{anual} = VaR_{diaria}\sqrt{250}$$

$$\sigma_{diaria} = \frac{\sigma_{anual}}{\sqrt{250}} \qquad VaR_{diaria} = \frac{VaR_{anual}}{\sqrt{250}}$$

$$\sigma_{anual} = \sigma_{mensual}\sqrt{12} \qquad VaR_{anual} = \sigma_{mensual}\sqrt{12}$$

$$\sigma_{mensual} = \frac{\sigma_{anual}}{\sqrt{12}} \qquad VaR_{mensual} = \frac{\sigma_{anual}}{\sqrt{12}}$$

Suponiendo 20 días de operaciones al mes.

$$\sigma_{mensual} = \sigma_{diaria}\sqrt{20} \qquad VaR_{mensual} = VaR_{diaria}\sqrt{20}$$

$$\sigma_{mensual} = \frac{\sigma_{anual}}{\sqrt{12}} \qquad VaR_{mensual} = \frac{VaR_{anual}}{\sqrt{12}}$$

$$\sigma_{semanal} = \sigma_{diario}\sqrt{5} \qquad VaR_{semanal} = VaR_{diario}\sqrt{5}$$

$$\sigma_{diario} = \frac{\sigma_{semanal}}{\sqrt{5}} \qquad VaR_{diario} = \frac{VaR_{semanal}}{\sqrt{5}}$$

Volatilidad y VaR en diferentes horizontes de tiempo

VaR Delta-Normal o varianzas-covarianzas (sin promedios):

$$VaR = Z \times \sigma \times \sqrt{t} \qquad [\%]$$

$$VaR = Z \times V_0 \times \sigma \times \sqrt{t} \qquad [\$]$$

Volatilidad y VaR en diferentes horizontes de tiempo

Ejemplo:

Una inversión valorada en $500 millones al día de hoy tiene una volatilidad de 15% anual.

¿Cuál es el VaR diario con una confianza del 99%?

VaR diario (250 días) $= \frac{2{,}326 \times 500.000.000 \times 0{,}15}{\sqrt{250}} = \mathbf{\$11.033,186,76}$

¿Cuál es el VaR semanal?

VaR semanal (5 días) = $\$11.033{,}186{,}76 \times \sqrt{5} = \mathbf{\$24.670.955,60}$

Método analítico (Método de Varianzas-covarianzas)

VaR Delta-Normal o varianzas-covarianzas (con promedios):

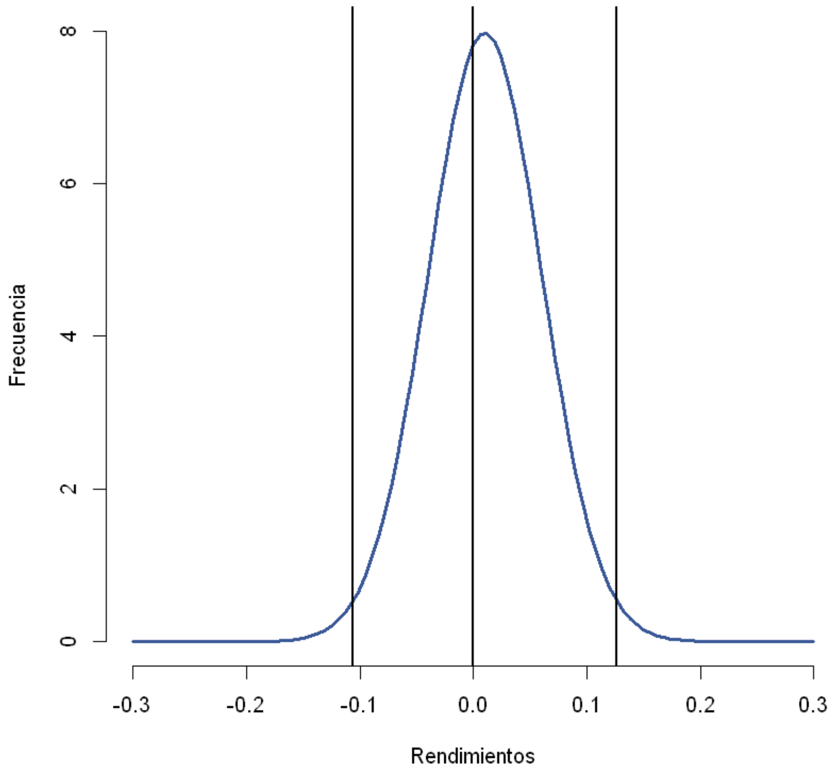
Supuestos: los rendimientos siguen una distribución normal y media de los rendimientos es diferente de cero. $\mu \neq 0$

Z_α: valor de z de la distribución normal, N(μ, σ^2).

$|Z_\alpha| \neq Z_{NC}$

$$VaR = |\mu + Z_\alpha \times \sigma| \quad [\%]$$

$$VaR = |\mu + Z_\alpha \times \sigma \times V_0| \quad [\$]$$



VaR para un portafolio de varios activos

V: Varianza

Varianza: es el cuadrado de la dispersión alrededor de la media (σ^2).

Desviación estándar: es la raíz cuadrada de la varianza. Tiene las mismas unidades que la variable original (σ).

Covarianza: dispersión conjunta entre dos variables (σ_{ij}).

Coeficiente de correlación: da una medida de dependencia lineal entre dos variables. Es la normalización o estandarización de la covarianza. Es adimensional (ρ).

VaR para un portafolio de varios activos

Propiedades:

X y Y son variables aleatorias y a, b son constantes.

$V(aX) = a^2V(X)$

$V(aX+b) = a^2V(X)$. La varianza de una constante es igual a cero.

La covarianza entre la misma variable es igual a su varianza: COV(X,X) = V(X) $\sigma_{X,X} = \sigma_X^2$

Entre variables independientes la covarianza y correlación es igual a cero.

$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCOV(X,Y)$ $\sigma_{aX+bY}^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\sigma_{X,Y}$

COV(X,Y) = Correlación x desviación estándar (X) x desviación estándar (Y) $\sigma_{X,Y} = \sigma_X\sigma_Y\rho_{X,Y}$

$$\sigma_{aX+bY}^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\sigma_X\sigma_Y\rho_{X,Y}$$

VaR para un portafolio de varios activos

Rendimiento esperado y volatilidad de un portafolio de dos activos:

$$R_P = w_A R_A + w_B R_B$$

$$\sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_{A,B} \longrightarrow \sigma_P = \sqrt{w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_{A,B}}$$

$$\sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} \longrightarrow \sigma_P = \sqrt{w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_A}$$

R_P: Rendimiento esperado del portafolio.

R_i: Rendimiento esperado del activo i.

w_A: Ponderación del activo A.

w_B: Ponderación del activo B.

σ_P^2: Varianza del portafolio.

σ_P: Desviación estándar o volatilidad del portafolio.

σ_A^2: Varianza del activo A.

σ_B^2: Varianza del activo B.

σ_A: Desviación estándar o volatilidad del activo A.

σ_B: Desviación estándar o volatilidad del activo B.

$\sigma_{A,B}$: Covarianza entre activo A y B.

$\rho_{A,B}$: Coeficiente de correlación entre el activo A y B.

VaR para un portafolio de varios activos

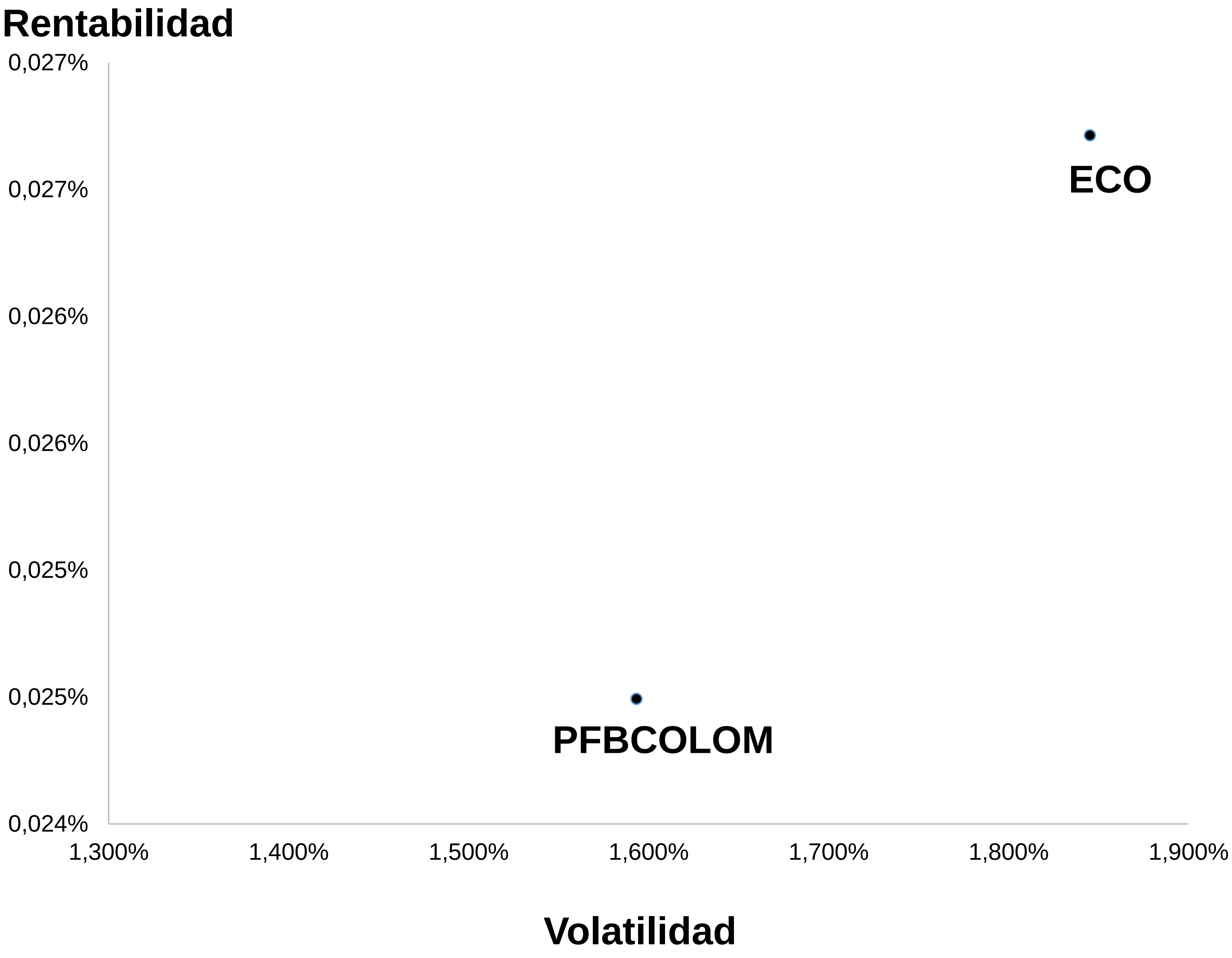
	Acción A	**Acción B**
Proporción invertida	45%	55%
Desviación estándar	40%	50%
Coeficiente de Correlación	0,3	
Varianza portafolio	13,77%	
Desviación estándar portafolio	**37,11%**	

$$\sigma_P^2 = 0{,}45^2 \times 0{,}40^2 + 0{,}55^2 \times 0{,}50^2 + 0{,}45 \times 0{,}55 \times 0{,}40 \times 0{,}50 \times 0{,}3 = 0{,}1377$$

$$\boldsymbol{\sigma_P = \sqrt{0,1377} = 0,3711}$$

VaR para un portafolio de varios activos

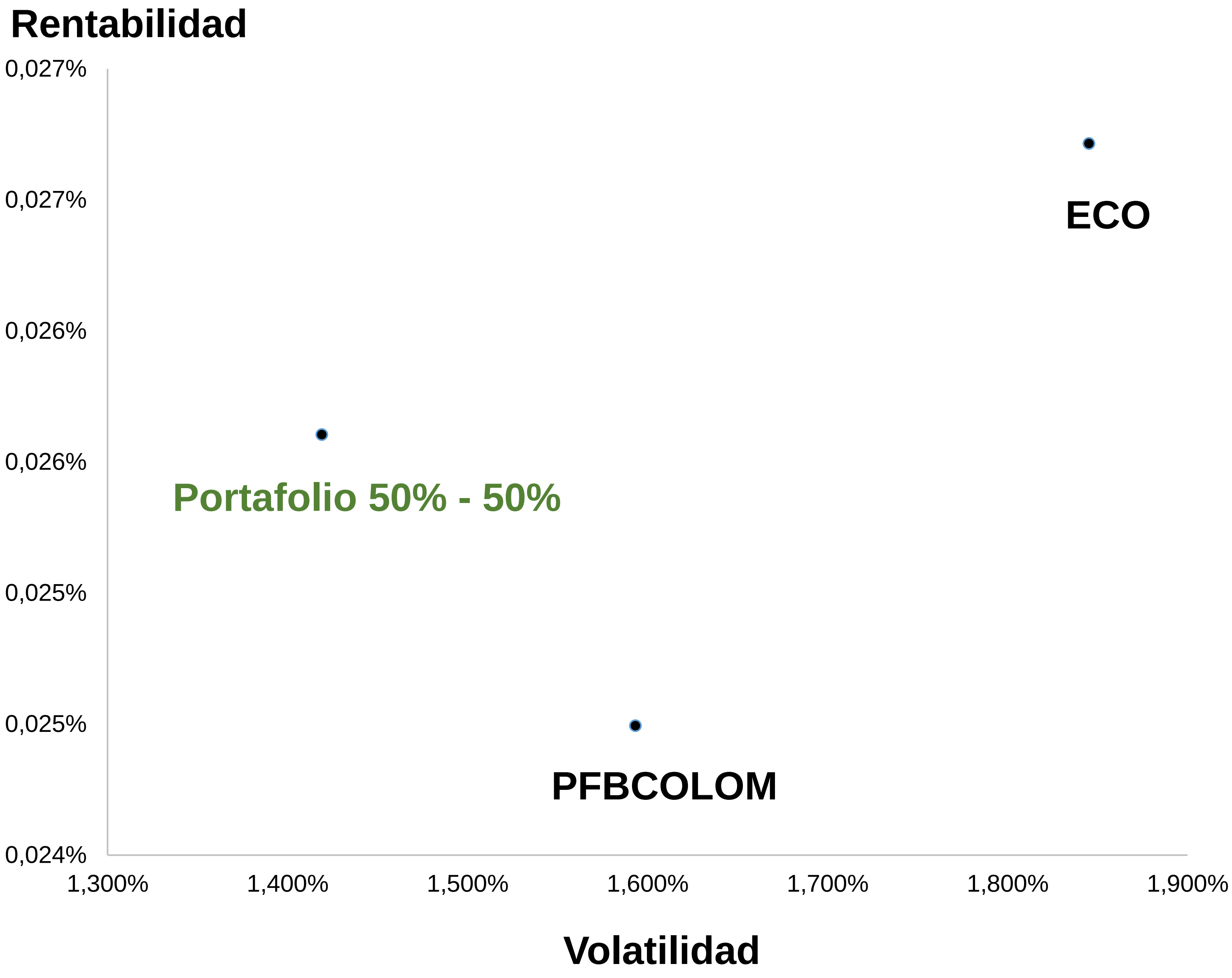
	ECO	PFBCOLOM
μ	0,027%	0,024%
σ	1,845%	1,593%



VaR para un portafolio de varios activos

	ECO	PFBCOLOM	Portafolio
μ	0,027%	0,024%	0,026%
σ	1,845%	1,593%	1,419%
w_i	50%	50%	

$$\rho_{ECO,\ PFBCOLOM} = 0{,}3592$$



VaR para un portafolio de varios activos

Rendimiento esperado y volatilidad de un portafolio de tres activos:

$$R_P = w_A R_A + w_B R_B + w_C R_C$$

$$\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + w_C^2\sigma_C^2 + 2w_A w_B \sigma_{A,B} + 2w_A w_C \sigma_{A,C} + 2w_B w_C \sigma_{B,C}}$$

$$\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + w_C^2\sigma_C^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} + 2w_A w_C \sigma_A \sigma_C \rho_{A,C} + 2w_B w_C \sigma_B \sigma_C \rho_{B,C}}$$

R_P: Rendimiento esperado del portafolio.

R_i: Rendimiento esperado del activo i.

w_1: Ponderación del activo i.

σ_P^2: Varianza del portafolio.

σ_P: Desviación estándar o volatilidad del portafolio.

σ_i^2: Varianza del activo i.

σ_i: Desviación estándar o volatilidad del activo i.

$\sigma_{i,j}$: Covarianza entre activo i y j.

$\rho_{i,j}$: Coeficiente de correlación entre el activo i y j.

VaR para un portafolio de varios activos

Rendimiento esperado y volatilidad de un portafolio de tres activos:

	Acción A	**Acción B**	**Acción C**
Proporción invertida	30%	45%	25%
Desviación estándar	12%	15%	22%

$$\boldsymbol{\sigma_p = 12,03\%}$$

Matriz de correlaciones:

	Acción A	**Acción B**	**Acción C**
Acción A	1	0,15	0,35
Acción B	0,15	1	0,47
Acción C	0,35	0,47	1

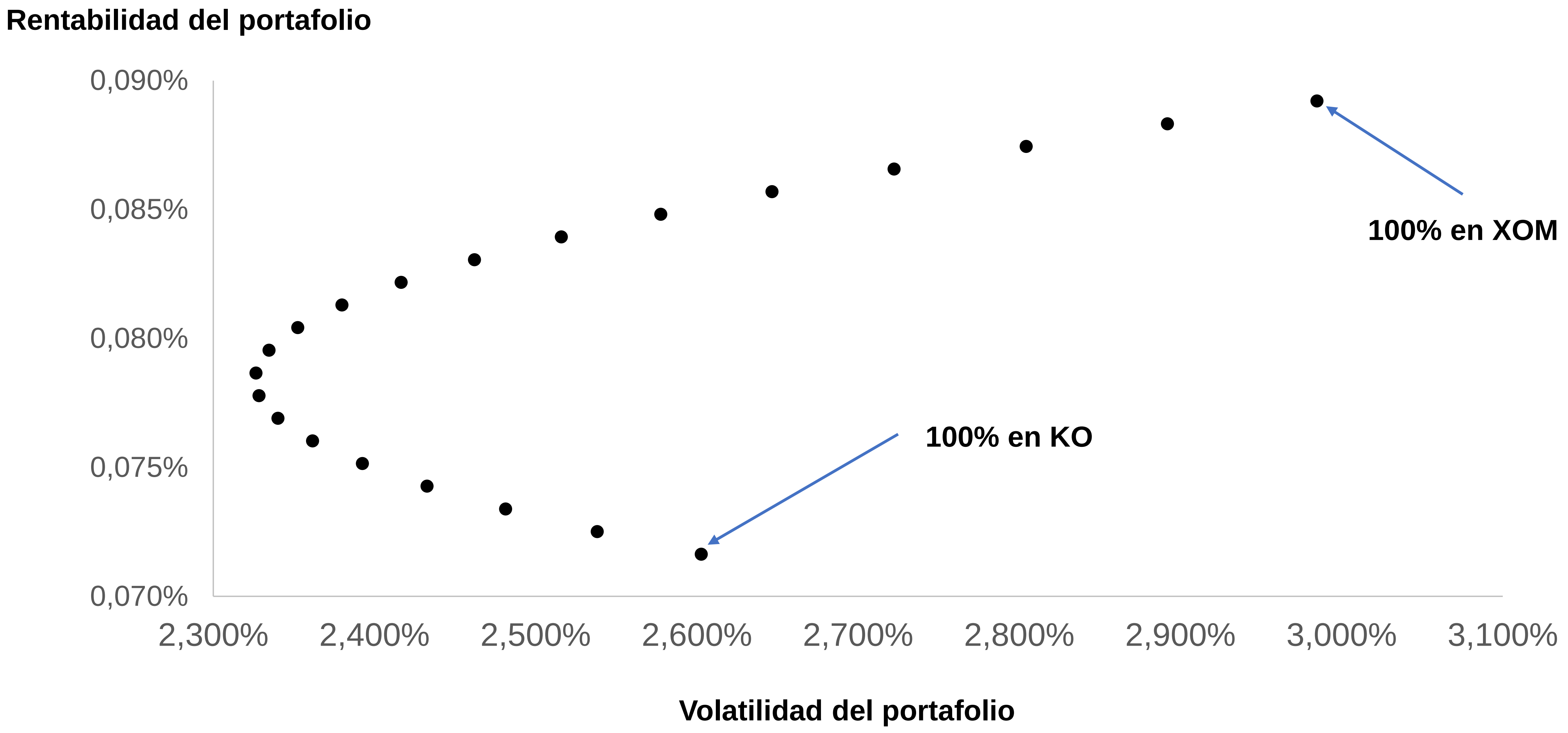
VaR para un portafolio de varios activos

	XOM	**KO**	
Rentabilidad esperada	0,089%	0,072%	Semanal
Volatilidad	2,985%	2,603%	Semanal

Matriz de correlaciones:

	XOM	**KO**
XOM	1	0,415
KO	0,415	1

VaR para un portafolio de varios activos



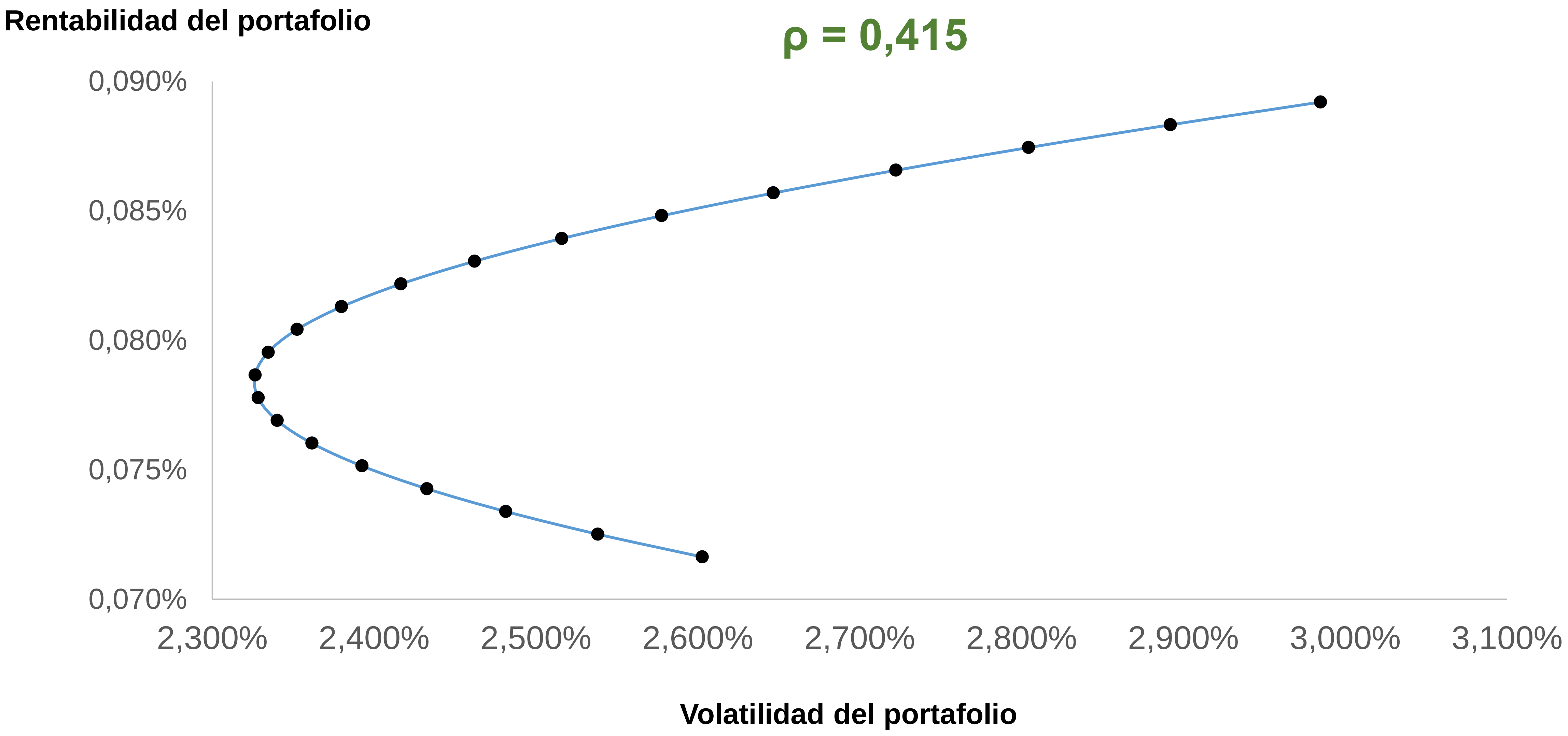
VaR para un portafolio de varios activos

Portafolio de mínimo riesgo

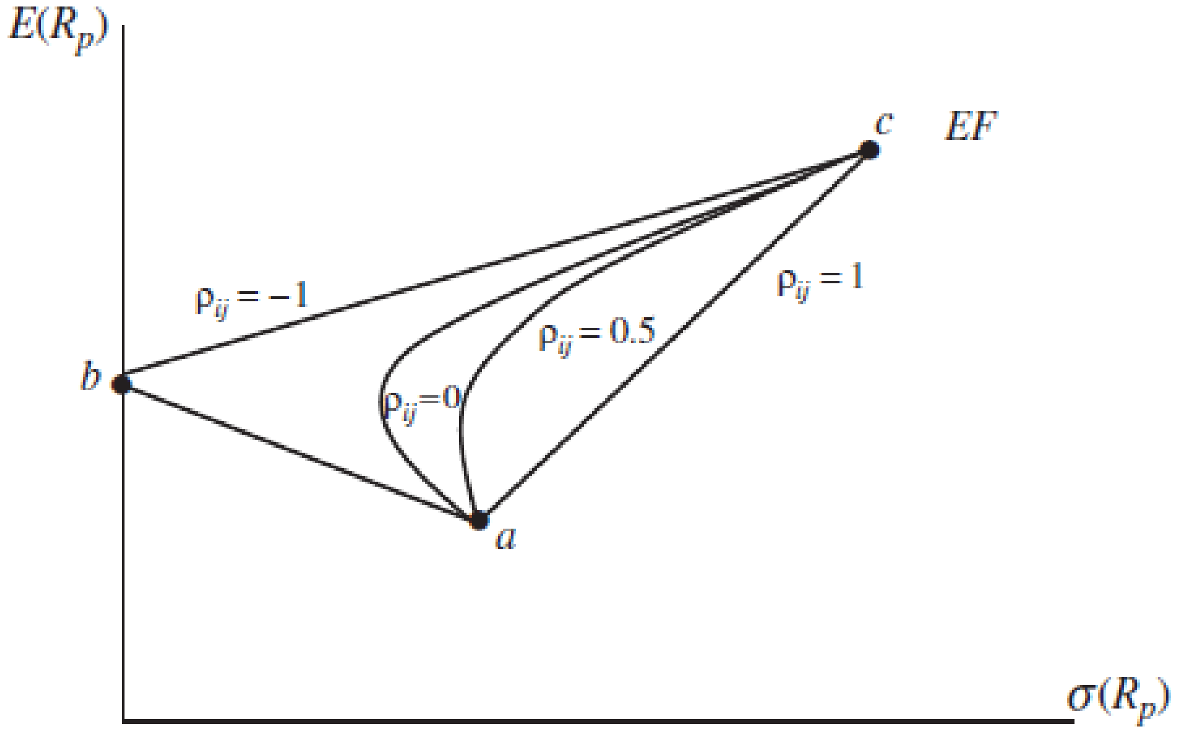
Proporciones de inversión:

Portafolio	XOM	KO	Riesgo	Rentabilidad
1	0%	100%	2,603%	0,072%
2	5%	95%	2,538%	0,073%
3	10%	90%	2,481%	0,073%
4	15%	85%	2,433%	0,074%
5	20%	80%	2,393%	0,075%
6	25%	75%	2,362%	0,076%
7	30%	70%	2,340%	0,077%
8	35%	65%	2,328%	0,078%
9	40%	60%	2,327%	0,079%
10	45%	55%	2,335%	0,080%
11	50%	50%	2,352%	0,080%
12	55%	45%	2,380%	0,081%
13	60%	40%	2,417%	0,082%
14	65%	35%	2,462%	0,083%
15	70%	30%	2,516%	0,084%
16	75%	25%	2,578%	0,085%
17	80%	20%	2,647%	0,086%
18	85%	15%	2,722%	0,087%
19	90%	10%	2,804%	0,087%
20	95%	5%	2,892%	0,088%
21	100%	0%	2,985%	0,089%

VaR para un portafolio de varios activos



VaR para un portafolio de varios activos



VaR para un portafolio de varios activos

Forma polinomial para calcular la volatilidad de un portafolio de n activos:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}$$

$$VaR_P = |Z_\alpha| \times \sigma_P \times \sqrt{t} \quad [\%]$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i<j} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}$$

$$VaR = |\mu + Z_\alpha \times \sigma_P \times V_0| \quad [\$]$$

Para n activos, resultan $\frac{n(n+1)}{2}$ términos

VaR para un portafolio de varios activos

Forma matricial para calcular la volatilidad de un portafolio de n activos:

$$\sigma_P^2 = \begin{pmatrix} w_A & w_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} \\ \sigma_{AB} & \sigma_B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_A \\ w_B \end{pmatrix} = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}$$

$\begin{pmatrix} w_A & w_B \end{pmatrix}$: Vector fila de ponderaciones

$$\sigma_P = \sqrt{W \Omega W^T}$$

$\begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} \\ \sigma_{A2} & \sigma_B^2 \end{pmatrix}$: Matriz de varianzas - covarianzas

Ω: Matriz de varianzas – covarianzas.

W: Vector fila de ponderaciones.

W^T: Vector de proporciones transpuesto.

VaR para un portafolio de varios activos

Forma matricial para calcular la volatilidad de un portafolio de n activos:

Varianza del portafolio:

$$[W_A \quad W_B \quad W_C] \times \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} & \sigma_{AC} \\ \sigma_{BA} & \sigma_B^2 & \sigma_{BC} \\ \sigma_{CA} & \sigma_{CB} & \sigma_C^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_A \\ W_B \\ W_C \end{bmatrix}$$

Vector de proporciones

Matriz Varianzas - Covarianzas

Vector de proporciones transpuesto

$$\begin{bmatrix} V_A & COV_{AB} & COV_{AC} \\ COV_{2A} & V_B & COV_{B3} \\ COV_{CA} & COV_{CB} & V_C \end{bmatrix}$$

Matriz Varianzas - Covarianzas Simétrica

VaR para un portafolio de varios activos

Forma matricial para calcular la volatilidad de un portafolio de n activos:

Varianza del portafolio:

$$[W_A \quad W_B \quad W_C] \times \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} & \sigma_{AC} \\ \sigma_{BA} & \sigma_B^2 & \sigma_{BC} \\ \sigma_{CA} & \sigma_{CB} & \sigma_C^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_A \\ W_B \\ W_C \end{bmatrix}$$

=MMULT(vector proporciones;MMULT(matriz varianzas – covarianzas;TRANSPONER(vector proporciones)))

Ctrl + Shift + ENTER

Efecto del coeficiente de correlación sobre el riesgo

$$\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

Correlación negativa

perfecta

Si $\rho_{A,B} = -1$

$$\sigma_P = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB} = \sqrt{(A-B)^2} = A - B$$

$$\sigma_P = w_A\sigma_A - w_B\sigma_B$$

Es el portafolio de mayor diversificación.

En el caso en que los dos activos tenga igual proporción y volatilidad → $\boldsymbol{\sigma_P}$ **= 0**

Efecto del coeficiente de correlación sobre el riesgo

$$\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

Si $\rho_{A,B} = 0$

0

$$\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

$$\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_B^2 + w_B^2\sigma_B^2}$$

Portafolio incorrelacionado

Efecto del coeficiente de correlación sobre el riesgo

$$\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

Si $\rho_{A,B} = +1$

Correlación positiva

perfecta

$$\sigma_P = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB} = \sqrt{(A+B)^2} = A + B$$

$$\sigma_P = w_A\sigma_A + w_B\sigma_B$$

Portafolio de mayor riesgo.

Con correlación perfecta positiva el la volatilidad del portafolio es la suma de la volatilidad de cada activo multiplicada por la proporción de cada uno

Relación entre VaR global y VaR individual

A partir del los VaR individuales y la correlación entre los activos se puede

calcular el VaR global de un portafolio

$$VaR_P = \sqrt{VaR_A^2 + VaR_B^2 + 2VaR_A VaR_B \rho_{A,B}}$$

$$VaR_P = \sqrt{\begin{pmatrix} VaR_A & VaR_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{A,B} \\ \rho_{A,B} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} VaR_A \\ VaR_B \end{pmatrix}} = \sqrt{VaR_A^2 + VaR_B^2 + 2VaR_A VaR_B \rho_{A,B}}$$

Las volatilidades de los activos deben tener las mismas unidades de tiempo.

Los VaR individuales deben tener el mismo nivel de confianza.

Relación entre VaR global y VaR individual

	ECO	PFBCOLOM	σ_P
μ	0,027%	0,024%	0,026%
σ	1,845%	1,593%	1,419%
w_i	50%	50%	

$\rho_{ECO,\ PFBCOLOM} = 0,3592$

Valor del portafolio: $100 millones.

$$VaR_{ECO} = 2{,}326 \times \$50.000.000 \times 1{,}845\% = \$2.145.735$$

$$VaR_{PFBCOLOM} = 2{,}326 \times \$50.000.000 \times 1{,}593\% = \$1.852.659$$

$$VaR_P = \sqrt{\$2.145.735^2 + \$1.852.659\ ^2 + 2 \times \$2.145.735 \times \$1.852.659 \times 0{,}3592} = \$3.300.362$$

Relación entre VaR global y VaR individual

Forma polinomial para n activos:

$$VaR_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} VaR_i^2 + 2\sum_{i<j} VaR_i VaR_j \rho_{ij}}$$

Forma matricial para n activos:

$$VaR_P = \sqrt{[VaR]C[VaR]^T}$$

$$\begin{bmatrix} VaR_A & VaR_B & VaR_C \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \rho_A & \rho_{AB} & \rho_{AC} \\ \rho_{BA} & \rho_B & \rho_{BC} \\ \rho_{CA} & \rho_{CB} & \rho_C \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} VaR_A \\ VaR_B \\ VaR_C \end{bmatrix}$$

C: Matriz de correlaciones.

VaR: Vector fila de los VaR individuales.

VaR^T: Vector de los VaR individuales transpuesto.

Beneficio por diversificación

El VaR global es menor o igual que la suma de los VaR individuales:

$$VaR_P \leq \sum_{i=1}^{n} VaR_i$$

Beneficio por diversificación (BD): $$BD = \sum_{i=1}^{n} VaR_i - VaR_P$$

- El beneficio por diversificación se obtiene cuando las correlaciones entre los activos es menor a uno.
- El beneficio por diversificación corresponde a la disminución en el riesgo por la correlación entre los activos.
- El mayor beneficio por diversificación se tiene cuando las correlaciones entre los dos activos es negativa perfecta.
- No se tiene beneficio por diversificación cuando la correlación entre los activos es positiva perfecta.

Relación entre VaR global y VaR individual

	ECO	PFBCOLOM	σ_P
μ	0,027%	0,024%	0,026%
σ	1,845%	1,593%	1,419%
w_i	50%	50%	

$\rho_{ECO,\ PFBCOLOM} = 0,3592$

Valor del portafolio: $100 millones.

$$VaR_{ECO} = \$2.145.735$$

$$VaR_{PFBCOLOM} = \$1.852.659$$

$$VaR_P = \$3.300.362$$

BD = $2.145.735 + $1.852.659 - $3.300.362 = $698.032

VaR Varianzas - Covarianzas

Gracias

Profesor: Miguel Jiménez