# Introducción a la teoría de portafolios

Profesor: Miguel Jiménez

# Rendimiento esperado

$$R = \frac{P_{Final} - P_{Inicial}}{P_{Inicial}} = \frac{P_{Final}}{P_{Inicial}} - 1$$

Rendimiento o rentabilidad discreta.

$$R = \ln\left[\frac{P_{Final}}{P_{Inicial}}\right]$$

Rendimiento o rentabilidad continua.

$P_{Final}$: precio actual, es el valor final.

$P_{Inicial}$: precio anterior, es el valor inicial.

# Rendimiento esperado

Rendimiento o rentabilidad discreta.

$$R = \frac{P_{Final} - P_{Inicial} + dividendos}{P_{Inicial}} = \frac{P_{Final} + dividendos}{P_{Inicial}} - 1$$

Rendimiento o rentabilidad continua.

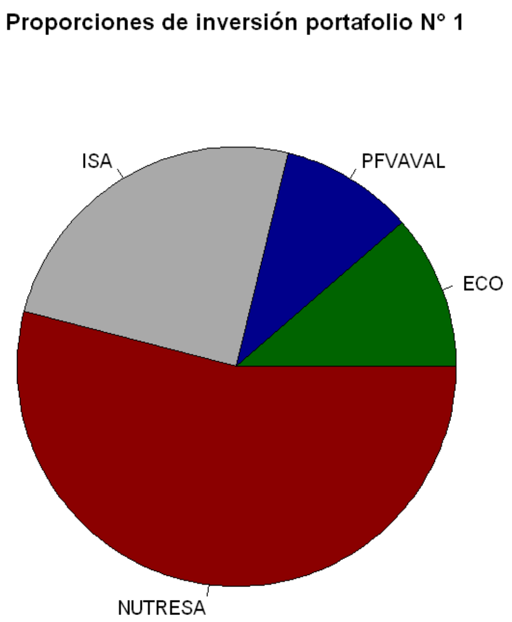
$$R = \ln\left[\frac{P_{Final} + dividendos}{P_{Inicial}}\right]$$

# Rendimiento esperado

## Portafolio de inversión:

$$E[R_P] = \sum_{i=1}^{n} W_i \times R_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = 1$$




$E[R_P]$: rendimiento esperado del portafolio de inversión.

$W_i$: proporción invertida en el activo i.

$R_i$: rendimiento esperado del activo i.

n: cantidad de títulos que conforman el portafolio.

# Rendimiento esperado

## Proporciones de inversión:

$$W_i = \frac{Valor\ de\ mercado\ acción_i}{Valor\ portafolio}$$

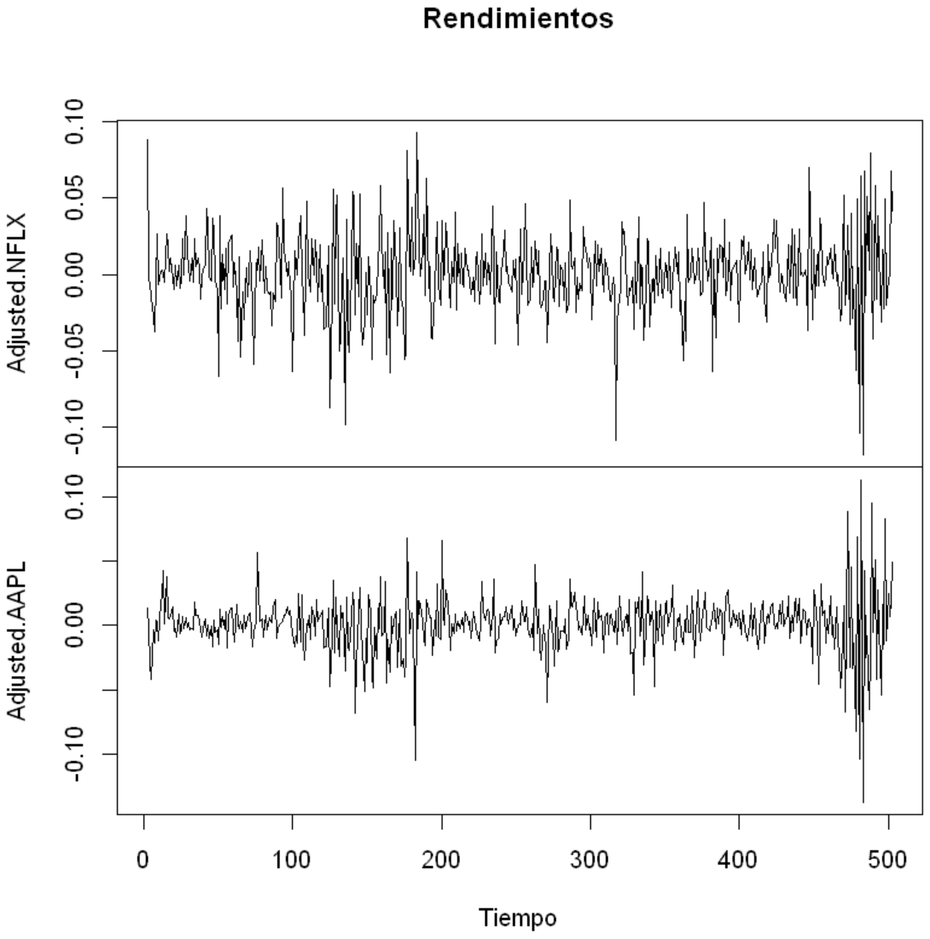
$$Valor\ portafolio = \sum_{i=1}^{n} Valor\ de\ mercado\ acción_i$$

$$Valor\ de\ mercado\ acción = S \times número\ de\ acciones$$

S: precio de la acción, precios *spot*.

La valoración de cada acción y del portafolio de inversión se hace con el último precio, este es el precio de mercado o también llamado precio *spot*.

# Rendimiento esperado




## Con datos históricos:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n}$$ Valor esperado

$\mu$: rendimiento medio o promedio del activo.

$$\mu_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_{P_i}}{n}$$ Valor esperado

$\mu_P$: rendimiento medio o promedio del portafolio.

# Volatilidad

## Con datos históricos:

La variación o dispersión alrededor de la media se expresa en unidades de la desviación estándar: σ.

También se conoce como volatilidad.

## Volatilidad histórica:

Un solo activo: $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \mu)^2}$

Portafolio de inversión: $\sigma_P = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(R_{P_i} - \mu_P\right)^2}$

También se puede hallar de otras dos maneras.

# Escalamiento en el tiempo

Días bursátiles:

Una semana tiene 5 días.

Un mes tiene 20 días.

Un año tiene 250 días.

Un año tiene 52 semanas.

Supuesto: los rendimientos continuos siguen una distribución normal y están i.i.d.

$$\sigma_{semanal} = \sigma_{diaria}\sqrt{5}$$

$$\sigma_{diaria} = \frac{\sigma_{semanal}}{\sqrt{5}}$$

$$\sigma_{mensual} = \sigma_{diaria}\sqrt{20}$$

$$\sigma_{diaria} = \frac{\sigma_{mensual}}{\sqrt{20}}$$

$$\sigma_{anual} = \sigma_{diaria}\sqrt{250}$$

$$\sigma_{diaria} = \frac{\sigma_{anual}}{\sqrt{250}}$$

$$E[R_{semanal}] = E[R_{diario}] \times 5$$

$$E[R_{diario}] = \frac{E[R_{semanal}]}{5}$$

$$E[R_{mensual}] = E[R_{diario}] \times 20$$

$$E[R_{diario}] = \frac{E[R_{mensual}]}{20}$$

$$E[R_{anual}] = E[R_{diario}] \times 250$$

$$E[R_{diario}] = \frac{E[R_{anual}]}{250}$$

# Comovimiento

## Covarianza:

Es una medida de relación lineal entre dos variables que describe el movimiento conjunto entre éstas.

$$\sigma_{A,B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R_A - \mu_A)(R_B - \mu_B)$$

$$\sigma_{A,B} = \rho_{A,B}\,\sigma_A\,\sigma_B$$

## Coeficiente de correlación:

Mide el grado de movimiento conjunto entre dos variables o la relación lineal entre ambas en un rango entre -1 y +1

$$\rho_{A,B} = \frac{\sigma_{A,B}}{\sigma_A \sigma_B}$$

$\rho_{A,B}$: correlación entre los activos A y B.

$\sigma_{A,B}$: covarianza entre los activos A y B.

$\sigma_A$: desviación estándar del activo A.

$\sigma_B$: desviación estándar del activo B

# Volatilidad

## Rendimiento esperado y volatilidad de un portafolio de dos activos:

$$R_P = w_A R_A + w_B R_B$$

$$\sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_{A,B} \rightarrow \sigma_P = \sqrt{w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_{A,B}}$$

$$\sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} \rightarrow \sigma_P = \sqrt{w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_A}$$

$R_P$: Rendimiento esperado del portafolio.

$R_i$: Rendimiento esperado del activo i.

$w_A$: Ponderación del activo A.

$w_B$: Ponderación del activo B.

$\sigma_P^2$: Varianza del portafolio.

$\sigma_P$: Desviación estándar o volatilidad del portafolio.

$\sigma_A^2$: Varianza del activo A.

$\sigma_B^2$: Varianza del activo B.

$\sigma_A$: Desviación estándar o volatilidad del activo A.

$\sigma_B$: Desviación estándar o volatilidad del activo B.

$\sigma_{A,B}$: Covarianza entre activo A y B.

$\rho_{A,B}$: Coeficiente de correlación entre el activo A y B.

# Volatilidad

## Rendimiento esperado y volatilidad de un portafolio de tres activos:

$$R_P = w_A R_A + w_B R_B + w_C R_C$$

$$\sigma_P = \sqrt{w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + w_C^2 \sigma_C^2 + 2 w_A w_B \sigma_{A,B} + 2 w_A w_C \sigma_{A,C} + 2 w_B w_C \sigma_{B,C}}$$

$$\sigma_P = \sqrt{w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + w_C^2 \sigma_C^2 + 2 w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} + 2 w_A w_C \sigma_A \sigma_C \rho_{A,C} + 2 w_B w_C \sigma_B \sigma_C \rho_{B,C}}$$

$R_P$: Rendimiento esperado del portafolio.

$R_i$: Rendimiento esperado del activo i.

$w_1$: Ponderación del activo i.

$\sigma_P^2$: Varianza del portafolio.

$\sigma_P$: Desviación estándar o volatilidad del portafolio.

$\sigma_i^2$: Varianza del activo i.

$\sigma_i$: Desviación estándar o volatilidad del activo i.

$\sigma_{i,j}$: Covarianza entre activo i y j.

$\rho_{i,j}$: Coeficiente de correlación entre el activo i y j.

# Volatilidad

Forma polinomial para calcular la volatilidad de un portafolio de n activos:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i<j} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}$$

Para n activos, resultan $\frac{n(n+1)}{2}$ términos

# Volatilidad

Forma matricial para calcular la volatilidad de un portafolio de n activos:

$$\sigma_P^2 = \begin{pmatrix} w_A & w_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} \\ \sigma_{AB} & \sigma_B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_A \\ w_B \end{pmatrix} = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}$$

$$\sigma_P = \sqrt{W\Omega W^T}$$

$\begin{pmatrix} w_A & w_B \end{pmatrix}$: Vector fila de ponderaciones

$\begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} \\ \sigma_{A2} & \sigma_B^2 \end{pmatrix}$: Matriz de varianzas - covarianzas

$\Omega$: Matriz de varianzas – covarianzas.

W: Vector fila de ponderaciones.

$W^T$: Vector de proporciones transpuesto.

# Volatilidad

Forma matricial para calcular la volatilidad de un portafolio de n activos:

Varianza del portafolio:

$$[W_A \quad W_B \quad W_C] \times \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} & \sigma_{AC} \\ \sigma_{BA} & \sigma_B^2 & \sigma_{BC} \\ \sigma_{CA} & \sigma_{CB} & \sigma_C^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_A \\ W_B \\ W_C \end{bmatrix}$$

Vector de proporciones

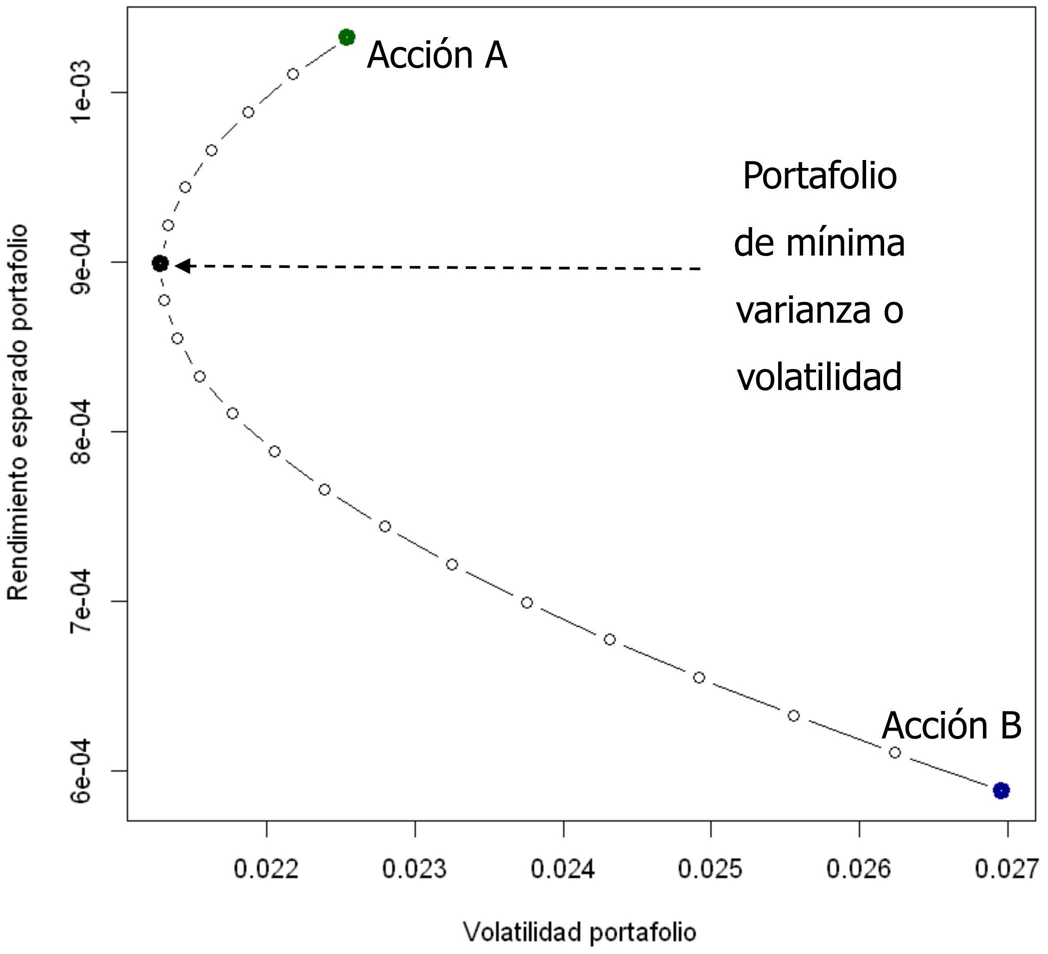
Matriz Varianzas - Covarianzas

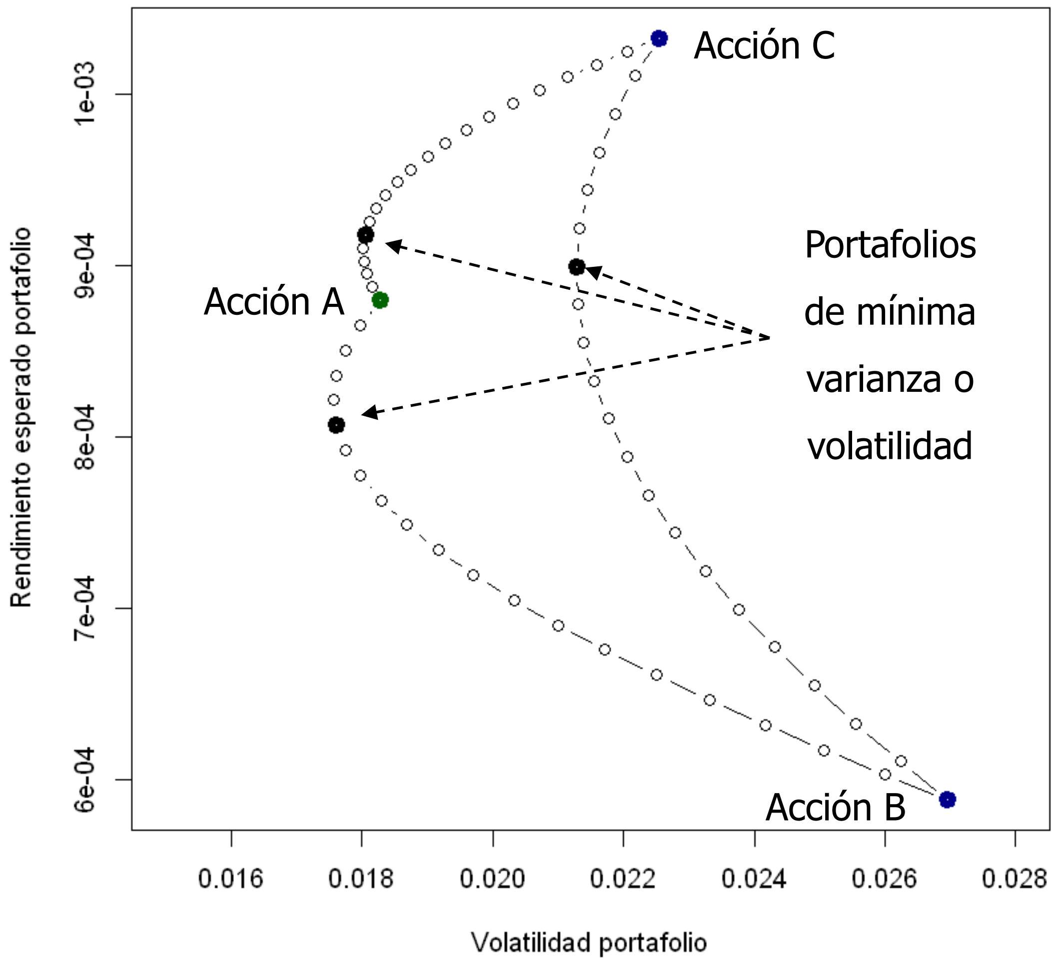
Vector de proporciones transpuesto

$$\begin{bmatrix} V_A & COV_{AB} & COV_{AC} \\ COV_{2A} & V_B & COV_{B3} \\ COV_{CA} & COV_{CB} & V_C \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Matriz Varianzas - Covarianzas Simétrica

# Volatilidad



# Efecto del coeficiente de correlación sobre el portafolio

$$\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_A\sigma_B\rho_{A,B}}$$

Correlación negativa perfecta Si $\rho_{A,B} = -1$

$$\sigma_P = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB} = \sqrt{(A-B)^2} = A - B$$

$$\sigma_P = w_A\sigma_A - w_B\sigma_B$$

Es el portafolio de mayor diversificación.

En el caso en que los dos activos tenga igual proporción y volatilidad → $\boldsymbol{\sigma_P = 0}$

# Efecto del coeficiente de correlación sobre el portafolio

$$\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_A\sigma_B\rho_{A,B}}$$

Incorrelacionados Si $\rho_{A,B} = 0$

0

$$\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + \cancel{2w_Aw_B\sigma_A\sigma_B\rho_{A,B}}}$$

$$\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_B^2 + w_B^2\sigma_B^2}$$

Portafolio incorrelacionado

# Efecto del coeficiente de correlación sobre el portafolio

$$\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

Correlación positiva perfecta Si $\rho_{A,B} = +1$

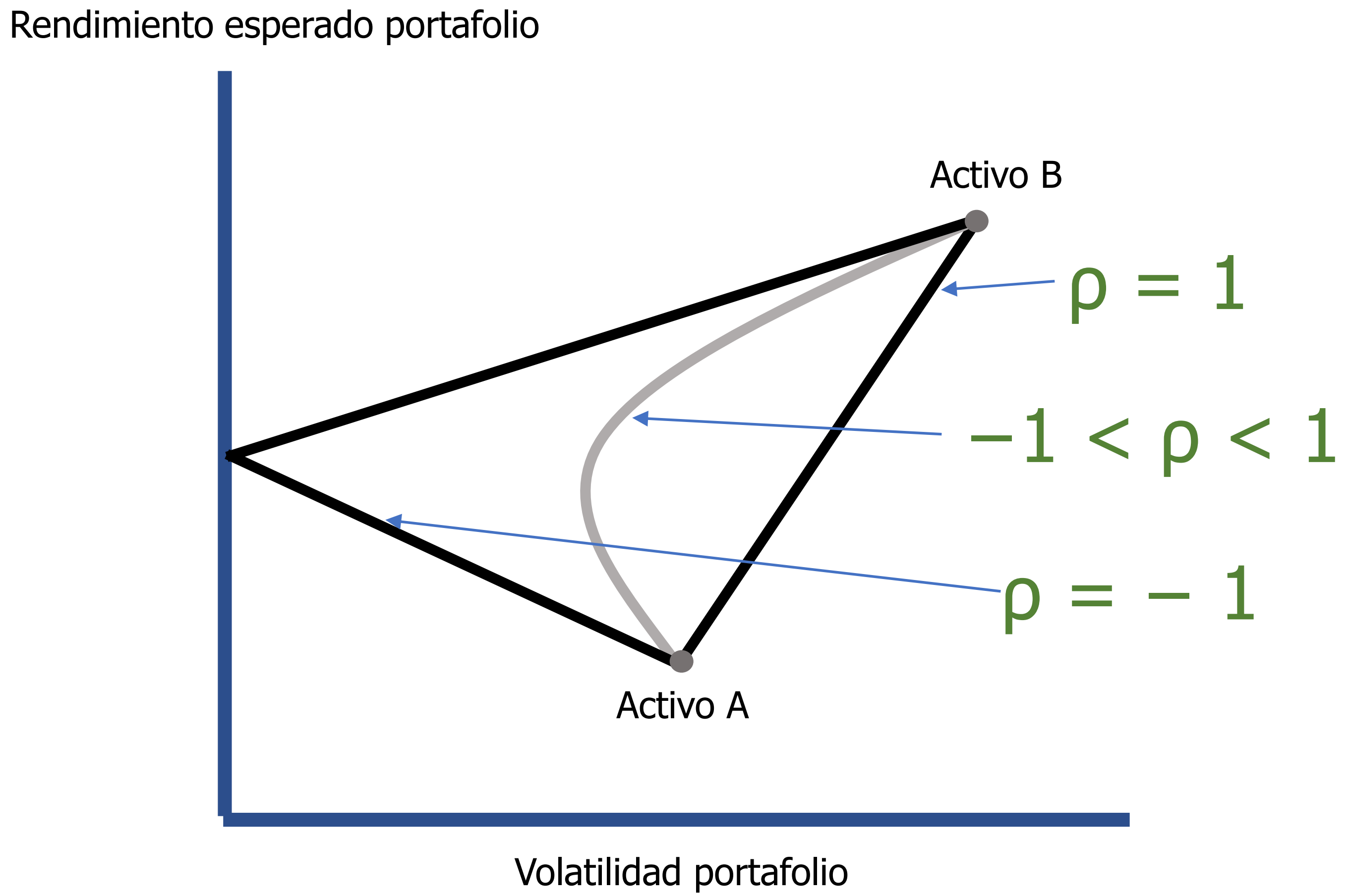
$$\sigma_P = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB} = \sqrt{(A+B)^2} = A + B$$

$$\sigma_P = w_A\sigma_A + w_B\sigma_B$$

Portafolio de mayor riesgo.

Con correlación perfecta positiva el la volatilidad del portafolio es la suma de la volatilidad de cada activo multiplicada por la proporción de cada uno

# Efecto del coeficiente de correlación sobre el portafolio



# Indicador de diversificación

*Diversification score:*

Una manera de medir la diversificación es comparar la desviación estándar de los activos en un portafolio con la desviación estándar del mismo portafolio.

$$h = 1 - \frac{\sigma_P}{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i}$$

Si los activos tienen baja correlación, la volatilidad del portafolio será baja, incluso si la volatilidad de los activos en el portafolio es alta.

Toma valores entre 0 y 1.

0: portafolio no diversificado.

1: portafolio totalmente diversificado.

# Introducción a la teoría de portafolioa

# Gracias

Profesor: Miguel Jiménez